Φώτης Φωτόπουλος – Αριστοτέλης Χαραλαμπάκης

Μηχανική

ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΑΙ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

ΣΤΡΕΨΗ

ΑΘΗΝΑ 1996

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τους φοιτητές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και καλύπτουν πλήρως το μάθημα της Οικολογίας που διδάσκεται κατά τα χειμερινό εξάμηνο στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών. Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος της σειράς για τα μαθήματα Γενικού Τμήματος που κυκλοφορεί.

Σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να δοθούν με σαφήνεια και απλότητα όλες οι έννοιες και οι εφαρμογές της Μηχανικής, διατηρώντας όμως παράλληλα την επιστημονική αυστηρότητα και ευκρίνεια που πρέπει να διέπει τέτοιες προσπάθειες.

Πρωταρχική προσπάθεια υπήρξε η διεξοδική επεξήγηση και διερεύνηση των εφαρμογών που έχουν τα όσα διδάσκονται στο μάθημα αυτό. Επειδή ο στόχος αυτός είναι δυνατόν να επιτευχθεί μέσω της επίλυσης ασκήσεων, επιλέξαμε τις χαρακτηριστικότερες εξ' αυτών.

Οι σημειώσεις αυτές είναι ημιτελείς. Δυστυχώς δεν υπήρξε ποτέ ο απαραίτητος χρόνος για την ολοκλήρωσή τους. Έτσι, τις παραθέτουμε ως έχουν, ελπίζοντας ότι οι συμπεριλαμβανόμενες ασκήσεις θα βοηθήσουν έστω και λίγο τους αναγνώστες.

Φ. Φωτόπουλος

Α. Χαραλαμπάκης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο: Επίλυση Υπερστατικών Προβλημάτων

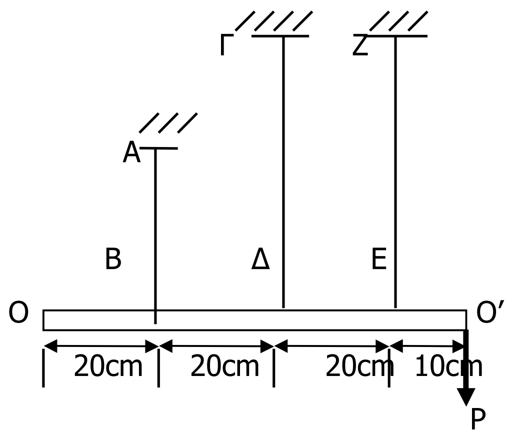
Άσκηση 1.1

Οριζόντια απαραμόρφωτη ράβδος ΟΟ′ βάρους 2000kp κρέμεται όπως φαίνεται στο σχήμα από δυο σύρματα ΑΒ,ΓΔ από χάλυβα με διατομή αντίστοιχα F_{AB}=1cm^2, $F_{ΓΔ}$=1,5 cm^2 και ένα από ορείχαλκο ΖΕ με διατομή F_{ZE}=1 cm^2 . Αν η ράβδος φορτίζεται στο άκρο της Ο′ με ένα φορτίο Ρ=1000 kp και μετά την παραμόρφωση των συρμάτων η ράβδος σχηματίζει μια μικρή γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ τα σύρματα παραμένουν κατακόρυφα, ζητούνται:

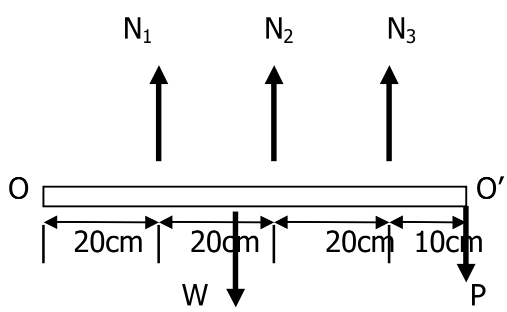
α) οι τάσεις των συρμάτων

β) η μεταβολή του μήκους των

Δίδονται τα μήκη των συρμάτων l_{AB}=40cm , $l_{BΓ}$=l_{ZE}=60cm και τα μέτρα ελαστικότητας E_{AB}=$E_{ΓΔ}$=2*10^6 at και E_{ZE}=10^{6}at.



Λύση:



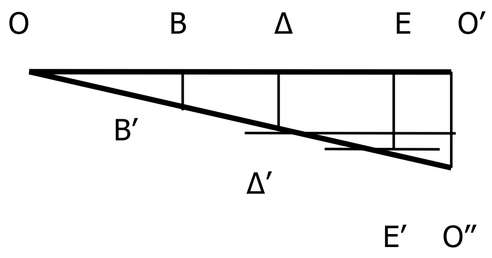
Ας θεωρήσομε το απλουστευμένο σχήμα στο οποίο έχομε αντικαταστήσει όλες τις ράβδους με τις αντίστοιχες δυνάμεις των.
Παίρνουμε ισορροπία κατά Y:

$N_1+N_2+N_3-P-W=0 \Rightarrow N_1+N_2+N_3=3000$ kp (1)

Παίρνουμε ροπές ως προς O:

$-N_1*20-N_2*40-N_3*60+P*70+W*35=0 \Rightarrow N_1+2N_2+3N_3=7000$ kp (2)

Παρατηρούμε ότι έχουμε δυο εξισώσεις (1) και (2) με τρεις αγνώστους, άρα το πρόβλημα είναι 1 φορά υπερστατικό. Αναζητούμε την τρίτη εξίσωση που θα λύσει το πρόβλημα στις παραμορφώσεις (βλέπε σχήμα παρακάτω).



Είναι: $\dfrac{Dl_3-Dl_1}{Dl_2-Dl_1}=\dfrac{40}{20}=2 \Rightarrow Dl_3-Dl_1=2Dl_2-2Dl_1 \Rightarrow Dl_3-2Dl_2+Dl_1=0$

Αλλά $\varepsilon=\dfrac{Dl}{l} \Rightarrow \dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{Dl}{l} \Rightarrow \dfrac{P}{EF}=\dfrac{Dl}{l} \Rightarrow Dl=\dfrac{Pl}{EF}$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\frac{N_3 60}{10^6 *1}-2\frac{N_2 60}{2*10^6*1{,}5}+\frac{N_1 40}{2*10^6*1}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60N_3-40N_2+20N_1=0 \Rightarrow N_1-2N_2+3N_3=0(3)$$

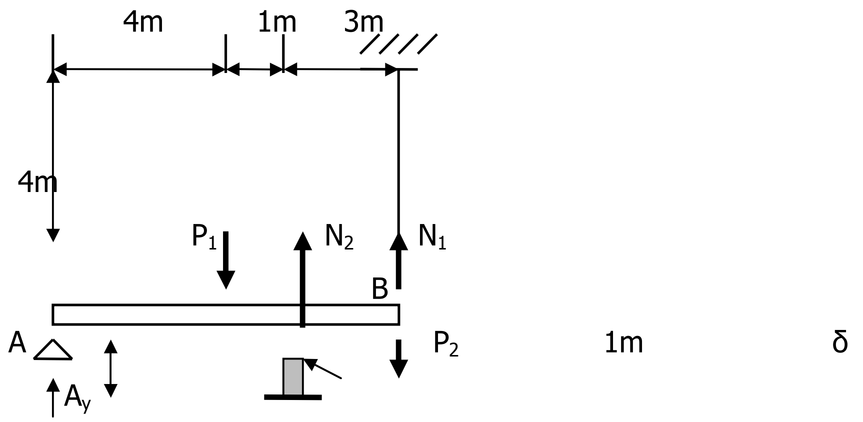
Οι (1),(2),(3) μας δίνουν τη λύση του προβλήματος που είναι:

N_2 = 1750 kp, N_3 = 1125kp και N_1= 125kp. Οι ζητούμενες τάσεις είναι προφανώς ίσες με το πηλίκο των δυνάμεων Ν με το εμβαδό τως εκάστοτε διατομών ήτοι σ_1=125 at, σ_2 = 1166,67 at και σ_3 = 1125at.

β) για την εύρεση της μεταβολής του μήκους των έχουμε Dl = l* σ /E $\Rightarrow$ Dl_1 = 125/2*10^6 = 2,5 *10^{-3} cm , Dl_2= 35*10^{-3} cm και Dl_3 = 67,5 *10^{-3} cm.

Άσκηση 1.2

Η απαραμόρφωτη δοκός ΑΒ που είναι αρθρωμένη στο Α και αναρτημένη στο Β από τον χαλύβδινο ελκυστήρα (1) μήκους 4m και διατομής 2cm^2, υποστηρίζεται με ένα χαλύβδινο υποστύλωμα (2) μήκους 1m και διατομής 2cm^2 και φορτίζεται με τα φορτία P_1=12t και P_2=2t, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ζητούνται να υπολογισθούν οι τάσεις στις ράβδους (1) και (2) καθώς και η υποχώρηση του άκρου Β της δοκού, αν γνωρίζουμε ότι λόγω κατασκευαστικού σφάλματος το υποστύλωμα έγινε 2mm κοντύτερο. Τι συμβαίνει στην περίπτωση που δεν υπάρχει η ανοχή αυτή στις διαστάσεις; Δίνεται Εχαλ =2*10^6 at.



Λύση:

Για να γίνει αντιληπτό το πρόβλημα, σχεδιάσαμε το δ (σφάλμα κατασκευής 2mm) πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με τις υπόλοιπες διαστάσεις της δοκού.

Παίρνουμε ισορροπία κατά x, και η μόνη δύναμη που προέρχεται από την άρθρωση Α είναι μηδενική, άρα Αx =0 (1) . Παίρνουμε ισορροπία δυνάμεων κατά y οπότε:

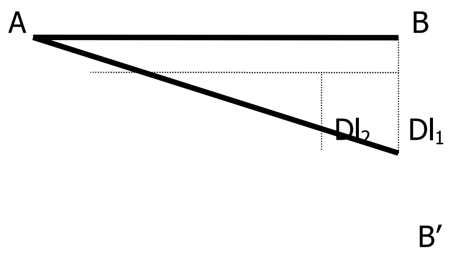
Ay +N_1 + N_2- P_1 - P_2 =0 $\Rightarrow$ Ay +N_1 + N_2 = 14t. (2)

Θεωρήσαμε ότι η δοκός ΑΒ θα ακουμπήσει στον ελαττωματικό στύλο και άρα θα δεχτεί αντίδραση N_2 από αυτόν που θα έχει τη φορά του σχήματος. Αυτό γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας της ασκήσεως. Η δοκός, λόγω της άρθρωσης στο Α, μπορεί να εκτελέσει μόνο στροφή. Αν τελικά δεν ακουμπήσει στον ελαττωματικό στύλο, τότε θα βγει κάποιο από τα ζητούμενα μεγέθη αδύνατο, και άρα θα πρέπει να ξαναλύσουμε το πρόβλημα από την αρχή, αγνοώντας τη N_2.

Παίρνω ροπές ως προς Α:

$4P_1 - 8N_1 - 5N_2 + 8P_2 = 0 \Rightarrow 8N_1 + 5N_2 = 64000$ kp (3) , καθόσον 1tn = 1000kp.

Οι σχέσεις (2) και (3) περιέχουν τρεις αγνώστους και επομένως θέλουμε άλλη μια εξίσωση για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, που θα είναι μια φορά υπερστατικό.



Μετά την παραμόρφωση, η δοκός θα στραφεί όπως είπαμε πριν περί το Α και το Β θα πάει στη θέση Β′.

Η απόσταση ΒΒ′ ισούται με Dl_1 καθότι θα επιμηκυνθεί η δοκός (1). Θα βραχυνθεί όμως η δοκός (2) ταυτόχρονα έστω κατά Dl_2. Από όμοια τρίγωνα, εύκολα προκύπτει ότι:

$$\frac{Dl_2 + \delta}{5} = \frac{Dl_1}{8} \Rightarrow 8Dl_2 + 8\delta = 5Dl_1. \quad (4)$$

Πολύ σημαντικό για να λύνουμε ασκήσεις γενικά στη Μηχανική, είναι να γνωρίζουμε τις εκάστοτε μονάδες μέτρησης των μεγεθών. Έτσι θα πρέπει να προσέξουμε ότι στην εξίσωση (4) όλα τα μεγέθη πρέπει να μπουν ή σε εκατοστά ή σε χιλιοστά. Θα προτιμήσουμε (χωρίς αυτό να παίζει ιδιαίτερο ρόλο) τη χρήση εκατοστών, οπότε:

$$8\frac{N_2 l_2}{EA_2}+8\delta=5\frac{N_1 l_1}{EA_1}\Rightarrow 8\frac{N_2 99{,}8}{2*10^6*2}+8*0{,}2=5\frac{N_1 400}{2*10^6*2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 199{,}6N_2+1{,}6*10^6=500N_1\Rightarrow 500N_1-199{,}6N_2=1{,}6*10^6 \quad (5)$$

Τώρα επιλύουμε το σύστημα των (5) & (3) οπότε και παίρνουμε:

N_1 = 5061,79 kp και N_2 = 4663,82kp.

Αν διαιρέσουμε τις παραπάνω δυνάμεις N_1 και N_2 με τα εμβαδά των αντιστοίχων διατομών θα πάρουμε τις ζητούμενες τάσεις σ_1 και σ_2:

σ_1 = 2530,9 at και σ_2 = -2331,91 at, όπου τα πρόσημα (+) και (-) υποδηλώνουν εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα. Τέλος υπολογίζουμε την υποχώρηση του άκρου Β της δοκού σκεφτόμενοι ότι αφού γνωρίζουμε την τάση της δοκού και το μέτρο ελαστικότητάς της, γνωρίζουμε το ε (παραμόρφωση). Όμως ε=Dl/l όπου l το μήκος της επίσης γνωστό, άρα Dl=ε*l ⇒ Dl = σ*l / E ⇒ Dl =2530,9 * 400/2*10^6 ⇒ Dl =0,51cm

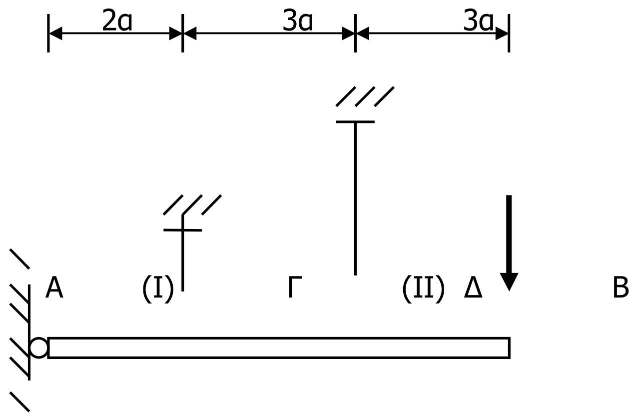
β) Αν δεν υπήρχε η ανοχή αυτή στις διαστάσεις, δηλαδή στην περίπτωση που δεν υπήρχε σφάλμα δ, τότε τα όμοια τρίγωνα θα έδιναν:

$$8\frac{N_2 l_2}{EA_2}=5\frac{N_1 l_1}{EA_1}\Rightarrow 8\frac{N_2 100}{2*10^6*2}=5\frac{N_1 400}{2*10^6*2}\Rightarrow 8N_2=20N_1\Rightarrow 5N_1=2N_2 (6)$$

Τότε θα είχαμε από (3) & (6) ένα σύστημα 2x2 που θα έδινε N_1 = 3121,95kp και N_2 = 7804,88kp που με τη σειρά τους θα έδιναν τάσεις σ_1 = 1560,74at και σ_2 = -3902,4at. Η υποχώρηση θα ήταν στην περίπτωση αυτή δ_B = 0,31cm.

Άσκηση 1.3

Αβαρής άκαμπτη δοκός στηρίζεται με άρθρωση στο άκρο Α με δυο ράβδους Ι και ΙΙ στα σημεία της Γ και Δ. Αν στο άκρο Β της δοκού ασκείται το κατακόρυφο φορτίο Ρ, υπολογίστε τις τάσεις των ράβδων Ι και ΙΙ όταν η θερμοκρασία του συστήματος αυξάνεται κατά T=20°C . Δίδονται F_I = $2F_{II}$ = 1cm^2, L_{II} = $2L_I$, a_T =125*10^{-6} (°C)$^{-1}$, P=1t, E=2*10^6 kp/cm^2.



Λύση:

Γνωρίζουμε ότι μια αιτία *αυτεντατικής κατάστασης* είναι η *θερμοκρασιακή μεταβολή*.

Οποτεδήποτε έχουμε μεταβολή της θερμοκρασίας, <u>το μόνο που έχουμε να κάνουμε επιπρόσθετα με αυτά που ήδη γνωρίζομε, είναι να προσθέσουμε τον όρο $a_T \Delta T l_1$</u> στην έκφραση της μεταβολής του μήκους Dl_1 της δοκού (ή ράβδου) μήκους l_1.

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα πάρουμε κατά τα γνωστά για τη ράβδο (I) :

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{D}l_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}} \Rightarrow \frac{\sigma_{\mathrm{I}}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{D}l_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}} \Rightarrow Dl_I = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} l_1}{E} \Rightarrow Dl_I = \frac{N_I l_I}{EF_I} \Rightarrow Dl_I = \frac{N_I l_I}{EF_I} + a_T \Delta T l_I, \quad (1)$$

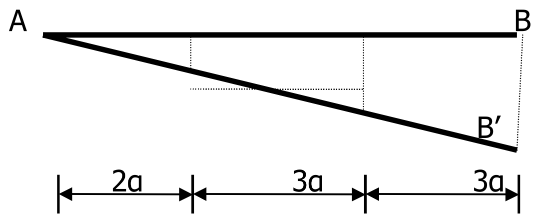
Δηλαδή βρήκαμε κατά τα γνωστά το Dl_{I} και στο τέλος προσθέσαμε τον όρο που αναφέραμε παραπάνω και που ευθύνεται στην περίπτωση αυτή για την πρόκληση της έντασης στη δοκό. Εντελώς όμοια βρίσκουμε για τη δοκό (II):

$$Dl_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EF_{II}} + a_T \Delta T l_{II}, \quad (2)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες που μας δόθηκαν με την εκφώνηση του προβλήματος, παίρνουμε:

$$Dl_{II} = \frac{4N_{II}l_I}{EF_I} + 2a_T\Delta Tl_I, \quad (3)$$

Αρκεί τώρα για την επίλυση του θέματος, να βρούμε κάποια σχέση που να συνδέει τις παραπάνω εξισώσεις (1) & (3). Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος. Από τα όμοια τρίγωνα παίρνουμε:



$$\frac{Dl_I}{Dl_{II}} = \frac{2a}{5a} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5Dl_I = 2Dl_{II} \quad (4)$$

Από την (4) λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (3) παίρνουμε:

$$8\frac{N_{II}l_I}{EF_I} + 4a_T\Delta Tl_I = 5\frac{N_Il_I}{EF_I} + 5a_T\Delta Tl_I \quad (5)$$

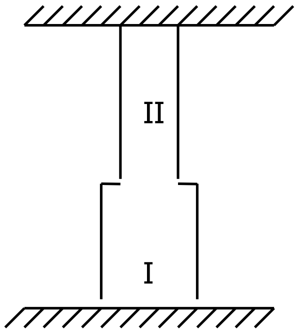
Είναι σαφές ότι από μόνη της η (5) δε μας παρέχει τη λύση του προβλήματος και επομένως θέλουμε άλλη μια εξίσωση την οποία θα την αναζητήσουμε από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας της δοκού. Ισορροπία κατά x δε μας κάνει καθόσον δεν υπάρχουν δυνάμεις κατά τον άξονα των x. Ισορροπία κατά y επίσης δε μας κάνει καθόσον θα υπεισέλθει ένας νέος άγνωστος (η αντίδραση στήριξης Ay). Έτσι απομένει η ισορροπία ροπών ως προς A για να αποφύγουμε την είσοδο στους αγνώστους της αντίδρασης ισορροπίας.

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow -N_I *2a - N_{II}\, 5a + P*8a = 0 \Rightarrow 2N_I + 5N_{II} = 8000$ (6).

Εξάλλου από την (5) έχουμε $5N_I - 6N_{II} = -10000$ (7). Οπότε από (6),(7) έχουμε προφανώς N_{II} = 1219,5 kp και N_I = 952,25 kp. Επομένως οι ζητούμενες τάσεις προκύπτουν αν διαιρέσουμε τις τιμές των δυνάμεων που βρήκαμε με τις αντίστοιχες διατομές των ράβδων στις οποίες εμφανίζονται: σ_I = 925,25at και σ_{II} = 2439at.

Άσκηση 1.4

Αμφίπακτη ράβδος αποτελείται από δυο τμήματα διαφορετικής διατομής . Να βρεθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στη ράβδο όταν η θερμοκρασία της αυξηθεί κατά T=50°C. Δίδονται L_2 = 1,5L_1, E=2*10^6 kp/cm^2, a=125*10^{-6} (°C)$^{-1}$, F_1 = 2F_2 = 4cm^2.



Λύση:

Πρόκειται για μια ακόμη αυτεντατική κατάσταση λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής. Κατ' ανάλογο τρόπο με την προηγούμενη άσκηση παίρνουμε:

$$Dl_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EF_{II}} + a_T \Delta T l_{II}, \quad (1)$$

για το τμήμα (ΙΙ) της δοκού ενώ για το τμήμα (Ι) έχομε εντελώς ανάλογα:

$$Dl_{I} = \frac{N_{I} l_{I}}{EF_{I}} + a_T \Delta T l_{I}, \quad (2)$$

Λόγω των δυο πακτώσεων, το συνολικό μήκος της ράβδου θα παραμείνει σταθερό, με άλλα λόγια Dl=0 $\Rightarrow$ Dl_1 + Dl_2 =0 (3). Από την (3) και λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{N_{II} l_{II}}{EF_{II}} + a_T \Delta T l_{II} + \frac{N_I l_I}{EF_I} + a_T \Delta T l_I = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{N}_{\mathrm{II}} \frac{3}{2} l_I}{\frac{1}{2} EF_I} + \frac{3}{2} a_T \Delta T l_I + \frac{N_I l_I}{EF_I} + a_T \Delta T l_I = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \frac{N_{II}}{2*10^6*4} + \frac{3}{2} 125*10^{-6}*50 + \frac{N_I}{2*10^6*4} + 125*10^{-6}*50 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} N_{II} + 9375 + \frac{N_I}{8} + 6250 = 0 \Rightarrow \frac{3}{8} N_{II} + \frac{N_I}{8} = -15625, \quad (4)$$

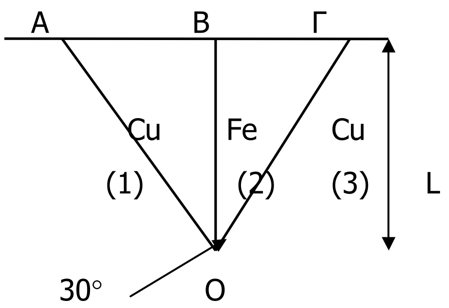
Θέλουμε λοιπόν εκτός από την (4), ακόμη μια εξίσωση μεταξύ των N_I και N_{II}. Αυτή είναι πασιφανής αν σκεφτούμε λογικά. Πρόκειται για ***μια*** ράβδο, άσχετα αν αυτή αποτελείται από δυο τμήματα με διαφορετική διατομή, επομένως η αξονική δύναμη που θα αναπτύσσεται σε αυτή, θα είναι η ίδια. Άρα $N_I = N_{II}$. Η (4) τότε δίνει:

N/2 =- 15625 $\Rightarrow$ N=-31250.

Οι δε τάσεις προκύπτουν από διαίρεση της αξονικής δύναμης Ν με την εκάστοτε διατομή. Δηλαδή θα έχουμε σ_I =-31250/4=-7812,5 και σ_{II} = -31250/2 =-15625at.

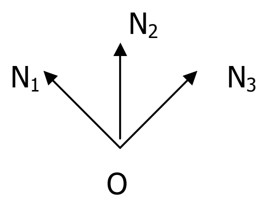
Άσκηση 1.5

Στην κατασκευή του σχήματος, οι ράβδοι ΑΟ και ΓΟ είναι από χαλκό, ενώ η ράβδος ΒΟ από σίδηρο. Να βρεθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους όταν η θερμοκρασία τους αυξηθεί κατά T=50°C. Δίνονται F_{CU} =0,5cm^2, F_{FE}=1,0 cm^2, E_{CU} =1,1*10^6 kp/cm^2, E_{FE}=2,1*10^6 kp/cm^2, a_{CU} =165*10^{-7} (°C)$^{-1}$ και a_{FE} =125*10^{-7} (°C)$^{-1}$.



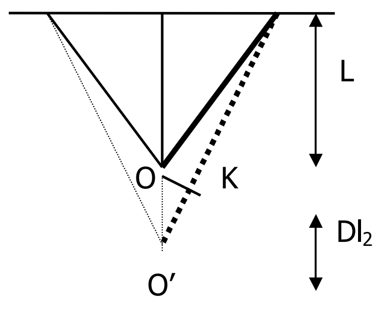
Λύση:

Θα πάρουμε την ισορροπία του κόμβου Ο. Παρατηρούμε ότι έχουμε πλήρη συμμετρία κατά άξονα y (όχι μόνο γεωμετρικά, αλλά και ως προς τα υλικά που χρησιμοποιούνται.) Έτσι η μια εκ των δυο εξισώσεων που προκύπτουν από την ισορροπία του κόμβου Ο θα δώσει $N_1=N_3$.



Επίσης η ισορροπία του κόμβου Ο κατά y δίνει:

$N_2 + N_1 \cos30^\circ + N_3\cos30^\circ=0 \Rightarrow N_2 +2N_1\cos30^\circ=0$ (1).



Έχουμε μια εξίσωση και άρα θέλουμε ακόμη μια καθόσον έχουμε δυο αγνώστους. Επομένως το πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε είναι μια φορά υπερστατικό. Θα αναζητήσουμε την άλλη εξίσωση στη συμβιβαστότητα των μετατοπίσεων. Πιο συγκεκριμένα από το παρακάτω σχήμα βλέπουμε πως μετά την παραμόρφωση το Ο θα πάει στη θέση Ο′. Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς σφάλμα ότι η γωνία των 30° έμεινε σταθερή.

Βέβαια έχουμε σχεδιάσει τις παραμορφώσεις πολύ μεγάλες, αλλά αυτό έχει γίνει μόνο για την καλύτερη επεξεργασία του προβλήματος.

Από το Ο φέρνουμε κάθετη προς μια διακεκομμένη πλευρά. Θα αναφερθούμε για την έντονη πλευρά. Τα ίδια ισχύουν για τη συμμετρική της. Αρχικά έχει μήκος L/cos30° και στη συνέχεια υφίσταται λόγω της θερμοκρασιακής μεταβολής μήκυνση Dl_3 (έστω). Φέρνοντας την κάθετη και θεωρώντας ότι οι παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές αναλογικά με τις υπόλοιπες διαστάσεις του σχήματος , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι Dl_2 = ΟΟ′ και Ο′Κ $\approx Dl_3$ = ΟΟ′ cos30° $\Rightarrow Dl_3 = Dl_2 \cos 30°$. (1)

Μπορούμε όμως κατά τα γνωστά να εκφράσουμε τις μηκύνσεις (ή βέβαια βραχύνσεις) των εκάστοτε ράβδων συναρτήσει των ΔΤ και των στοιχείων των. Έτσι έχουμε:

$$Dl_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} + a_2 \Delta T l_2, \quad (2)$$

$$Dl_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} + a_1 \Delta T l_1, \quad (3)$$

Από την (1) με αντικατάσταση των (2) & (3) παίρνουμε:

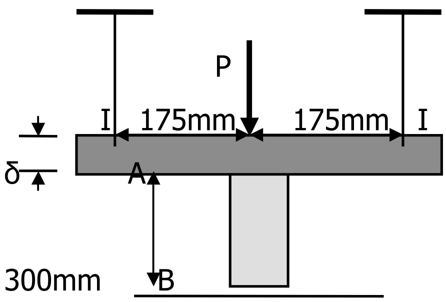
$N_1 = N_3 = -$ 146,2kp και N_2 = 253,23 kp.

Οπότε οι αντίστοιχες τάσεις θα είναι:

$\sigma_1 = \sigma_3 = N_1 / F_1$ = -146,2 /0,5 = -292,4 at και $\sigma_2 = N_2 / F_2$ = 253,23 / 1=253,23 at.

Άσκηση 1.6

[Θέμα 2ο/ 25/1/1996] Άκαμπτη δοκός Α στηρίζεται από δυο ράβδους από χάλυβα διατομής F_I = 500 mm^2 και μήκους 400mm. Όταν το σύστημα είναι αφόρτιστο η απόσταση μεταξύ του κάτω μέρους της δοκού Α και μιας ράβδου Β από χυτοσίδηρο είναι 0,05mm. Προσδιορίστε την τιμή του φορτίου P για την οποία στη ράβδο Β αναπτύσσεται τάση ίση με 20kp/cm^2. Δίδονται Εχαλ =2,1*10^6 kp/cm^2, Εχυτοσ.=1,0*10^6 kp/cm^2 , F_B=1500 mm^2.



Λύση:

Θα πάρουμε ισορροπία δυνάμεων κατά τον άξονα των τεταγμένων (y). Λόγω συμμετρίας (απόλυτης και γεωμετρικά και από άποψης υλικών) θα είναι η ίδια δύναμη στις δυο ράβδους στήριξης έστω N. Επίσης έστω N_B η δύναμη από τη ράβδο B με φορά προς τα άνω. Θα είναι:

$N + N_B + N - P = 0 \Rightarrow N_B + 2N = P$ (1)

Όμως η $N_B = \sigma_B * F_B \Rightarrow N_B = 20\ kp/cm^2 * 15\ cm^2 = 300kp$ (προσοχή στις μονάδες).

Τώρα έχουμε μια εξίσωση με δυο αγνώστους. Το πρόβλημα είναι μια φορά υπερστατικό και αναζητούμε τη δεύτερη εξίσωση που θα οδηγήσει στη λύση του στη συμβιβαστότητα των μετατοπίσεων.

Έστω Dl_B η βράχυνση της δοκού B. Έστω Dl_I η επιμήκυνση κάθε μιας από τις δυο ράβδους στήριξης. Τότε προφανώς:

$$Dl_I = \delta + Dl_B \Rightarrow \frac{N40}{2{,}1*10^6*5} = 5*10^{-3} + \frac{N_B 30}{1{,}0*10^6*15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8N}{2{,}1} = 5000 + 2N_B \Rightarrow 8N - 4{,}2N_B = 10500 \quad (2)$$

Αλλά τότε N=1470 kp και από (1) $\Rightarrow$ P =3240 kp.

Κεφάλαιο 2ο: Γενικές Ιδιότητες Τανυστών

Άσκηση 2.1

Γράψτε ένα τυχαίο τανυστή σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή. Εφαρμογή στον τανυστή:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Ένας τανυστής Α θα είναι συμμετρικός αν $A^T = A$ και αντισυμμετρικός αν $A^T = -A$. Αν επομένως θεωρήσουμε δυο τανυστές Α και Β τέτοιους ώστε Τ=Α+Β, με A^T=A και B^T=-B τότε θα έχουμε $T^T = (A+B)^T = A^T + B^T = A - B$.

Δηλαδή $T = A + B$ και $T^T = A - B \Rightarrow$ με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$A = \frac{T + T^T}{2}, \quad B = \frac{T - T^T}{2}$$

Για τον συγκεκριμένο τανυστή, εφαρμόζουμε τους παραπάνω τύπους οπότε και παίρνουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.2

Να γίνει διαγωνοποίηση (να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα) των παρακάτω τανυστών:

$$i) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad ii) \; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

i) θα λύσουμε αναλυτικά την περίπτωση αυτή, για τη δε περίπτωση (ii) η οποία είναι εντελώς ανάλογη, θα παραθέσουμε απλώς τα αποτελέσματα.

Για την εύρεση των ιδιοτιμών (έστω x) θα θέσουμε την παρακάτω χαρακτηριστική εξίσωση του Α ίση με το μηδέν και για τα x που θα προκύψουν (ιδιοτιμές) θα προσδιορίσομε τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα.

$$|A - xI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1)(-x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, -1)$$

Είναι σαφές ότι η ιδιοτιμή -1 εμφανίζεται δυο φορές (διπλή). Αρχίζουμε πάντα από τις απλές ιδιοτιμές (αν υπάρχουν), κατόπιν προχωρούμε με τις διπλές, κοκ.

Για x_1 = -1 έχουμε :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{11} - 2x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{11} + x_{12} - 2x_{13} = 0 \end{cases}$$

από τις τρεις εξισώσεις που παίρνουμε, αφαιρώντας από την δεύτερη την πρώτη έχουμε $x_{12} = x_{13}$ και επομένως από την πρώτη $x_{11} = x_{12} = x_{13}$.

Όμως όπως γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα, ισχύει $x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 = 1 \Rightarrow 3x_{11}^2 = 1 \Rightarrow x_{11} = \sqrt{3}/3 = x_{12} = x_{13}$ και άρα η αντίστοιχη ιδιοτιμή θα είναι η:

$$x_1 = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

Πάμε για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_2 , x_3 της διπλής ιδιοτιμής -1. Αν η ιδιοτιμή ήταν τριπλή θα είχε τρία ιδιοδιανύσματα κοκ. Η διαδικασία είναι τελείως ανάλογη και συνεπώς έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0$$

Επίσης θα ισχύει $x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2 = 1$. Όμως έχουμε έτσι δυο εξισώσεις με τρεις αγνώστους. Το κόλπο εδώ είναι το εξής. Επειδή θέλουμε δυο οιαδήποτε διανύσματα που να ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις, θέτουμε μια τιμή σε μια από τις τρεις μεταβλητές. Συνήθως και για ευκολία πράξεων προτιμούμε να θέσουμε μια μεταβλητή ίση με το μηδέν.

Αν θέσουμε $x_{23} = 0 \Rightarrow x_{21} = -x_{22}$. Έτσι από την άλλη εξίσωση παίρνουμε:

$$x_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]$$

οπότε απομένει το τρίτο ιδιοδιάνυσμα x_3. Αυτό θα το βρίσκουμε από το εξωτερικό γινόμενο των δυο άλλων, ήτοι $x_3 = (x_1)x(x_2)$. Δηλαδή:

$$x_3 = x_1 \otimes x_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x_3 = \frac{\sqrt{6}}{6} i + \frac{\sqrt{6}}{6} j - \frac{2\sqrt{6}}{6} k$$

ii) Από την χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτουν οι ιδιοτιμές $x_1 = 1, x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές και επομένως εργαζόμαστε ομοίως. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα παρακάτω:

$$x_1 = 1 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

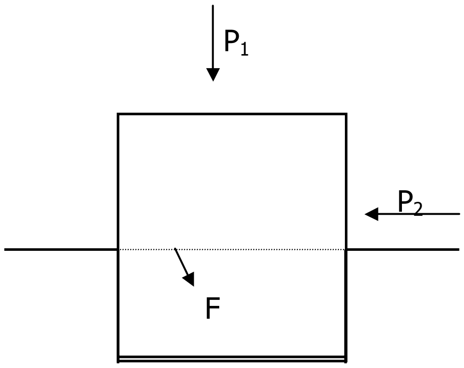
$$x_2 = -1 \Rightarrow \left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right]$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

Κεφάλαιο 3ο: Εντατική Κατάσταση

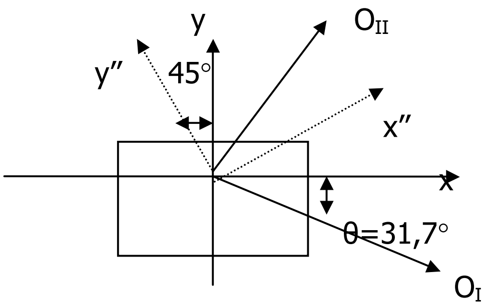
Άσκηση 3.1

Ένα μικρό πρισματικό σώμα καταπονείται με δυο ίσες δυνάμεις $P_1 = P_2 = 100kp$ θλιπτικά και διατμητικά όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τις κύριες τάσεις και τις διευθύνσεις τους, καθώς και τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και τις διευθύνσεις τους, σε ένα σημείο της διατομής $F = 1cm^2$ υποθέτοντας ότι η εντατική κατάσταση στη διατομή F είναι ομογενής.



Λύση:

Ας πάρουμε την κάτοψη της διατομής F (βλέπε σχήμα).



Είναι $\sigma_{yy} = -P_1 /F = -100/1=-100at$ καθόσον η δύναμη P_1 είναι θλιπτική και ακόμη $\sigma_{yx} = -P_2/F =-100at$, διότι η δύναμη P_2 προκαλεί διατμητική τάση που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον y και έχει φορά προς τα αρνητικά του άξονα x.

Στη συνέχεια γράφουμε τον τανυστή των τάσεων:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ -100 & -100 \end{bmatrix}$$

Οι κύριες τάσεις θα δίδονται εκ των γνωστών τύπων με απλή αριθμητική αντικατάσταση. Έχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{\mathrm{I,II}} = \frac{\sigma_{\mathrm{xx}} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2}{4} + \sigma^2_{xy}}$$ όπου βέβαια σ_{xx} =0 στην προκειμένη περίπτωση.

Παίρνουμε σ_{I} = 61,8 at και σ_{II} =-161,8at. Τονίζουμε ότι <u>η τάση σ_{I} είναι η μεγαλύτερη εκ των δυο τιμών που προκύπτουν από την παραπάνω σχέση</u>. Ισχύει με άλλα λόγια $\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}}$ ($> \sigma_{\mathrm{III}}$) αν έχουμε ένταση στο χώρο.

Για να βρούμε τη διεύθυνση των κυρίων αξόνων, εφαρμόζουμε την παρακάτω σχέση:

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = -2 \Rightarrow \theta = -31{,}7^\circ$$

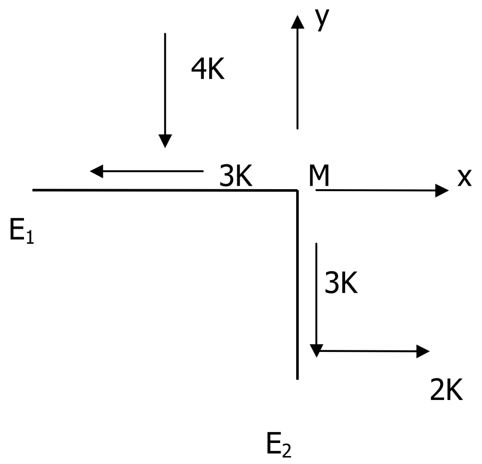
Η γωνία θ που προκύπτει αν είναι αρνητική σημαίνει στροφή Σ.Δ.Ω (σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού) αν είναι θετική, Α.Δ.Ω (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογίου). Εδώ είναι αρνητική άρα έχουμε στροφή Σ.Δ.Ω. κατά -31,7°.

<u>Ο κύριος άξονας O_{I} θα είναι εκείνος που θα σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με τον άξονα που καταπονείται από τη μεγαλύτερη τάση</u> (δηλαδή με τον x) . Ο δε άξονας O_{II} θα είναι κάθετος στον O_{I}. (βλέπε σχήμα).

Οι δε μέγιστες διατμητικές τάσεις προκύπτουν από τον παρακάτω τύπο:

$$\tau_{\max} = \frac{\left|\sigma_I - \sigma_{II}\right|}{2} = \frac{\left|61{,}8 + 161{,}8\right|}{2} = 111{,}8at$$

Για να βρούμε τη διεύθυνση των διατμητικών τάσεων (μεγίστων) φέρουμε από το κύριο σύστημα γωνία 45° Σ.Δ.Ω. βλέπε και σχήμα. Οπότε και προκύπτει το σύστημα αξόνων Ox″y″.



Άσκηση 3.2

Η επίπεδη εντατική κατάσταση σε ένα σημείο Μ ενός σώματος δίνεται από τις συνιστώσες των τάσεων σε δυο στοιχειώδεις επιφάνειες E_1 και E_2 στο Μ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν K=100 N/cm^2, να υπολογίσετε στο σημείο Μ:

α) τις κύριες τάσεις και τους κύριους άξονες των τάσεων.

β) τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και τα επίπεδα που εμφανίζονται αυτές καθώς και τις ορθές τάσεις στα επίπεδα αυτά.

γ) τα επίπεδα που είναι ελεύθερα ορθών τάσεων, και τις διατμητικές τάσεις στα επίπεδα αυτά.

Λύση:

α) Το πρόβλημα αυτό συνδυάζει όλα τα στοιχεία που θα μπορούσαν να ζητηθούν σε μια άσκηση αυτού του είδους και ως εκ τούτου συνίσταται για μελέτη.

Προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε τα δοσμένα από το σχήμα στοιχεία, ώστε να βρούμε αν είναι δυνατόν τον τανυστή τον τάσεων. Πράγματι σ_{xx} = 2K, σ_{yy} = -4K και σ_{xy} = -3K. Οι ορθές τάσεις υπολογίζονται εύκολα. Αυτές είναι θετικές όταν είναι εφελκυστικές (δείχνουν προς τα θετικά άξονα) και αρνητικές όταν είναι θλιπτικές (δείχνουν προς τα αρνητικά άξονα).

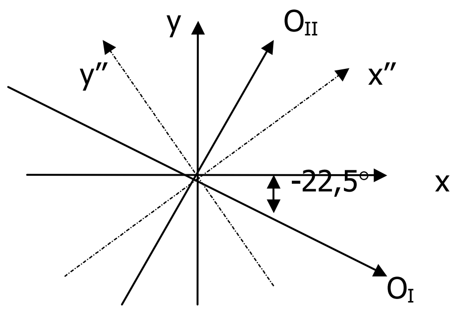
Για τις διατμητικές δυνάμεις, παρατηρούμε ότι αυτές ή θα αποκλίνουν η θα συγκλίνουν ταυτόχρονα σε μια γωνία. Εδώ αποκλίνουν. Ο πρώτος δείκτης τους δείχνει το επίπεδο στο οποίο η επιφάνεια είναι κάθετη και ο δεύτερος δείκτης δείχνει τη φορά της διατμητικής δύναμης. Μην ξεχνάμε ότι για να έχει έννοια η τάση, κάθε επιφάνεια όπως αυτή που εξετάζουμε, θεωρούμε ότι έχει έστω και ένα μικρό πάχος.

Εφαρμόζουμε τον τύπο που μας δίνει τις τιμές των κυρίων τάσεων.

$$\sigma_{\mathrm{I,II}} = \frac{\sigma_{\mathrm{xx}} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2}{4} + \sigma^2{}_{xy}} \Rightarrow \sigma_{\mathrm{I}} = 324 \text{ N/cm}^2 \text{ και } \sigma_{\mathrm{II}} = -524 \text{N/cm}^2.$$

Για να βρούμε τους κύριους άξονες βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης:

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{-6K}{2K + 4K} = -1 \Rightarrow 2\theta = -45° \Rightarrow \theta = -22{,}5°$$



Επομένως το κύριο σύστημα έχει στραφεί ΑΔΩ κατά 22,5° ως προς το σύστημα Οxy, και ο κύριος άξονας O_{I} σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με τον άξονα του Οxy που έχει τη μεγαλύτερη τάση, δηλαδή με τον x. (2K>-4K). (βλέπε και σχήμα).

Σύμφωνα λοιπόν με όσα προαναφέραμε, στον κύριο άξονα O_{I} θα εμφανίζεται η κύρια τάση σ_{I} = 324 N/cm^2 και στον σ_{II} θα εμφανίζεται η κύρια τάση σ_{II} = -524 N/cm^2.

β) Για τις μέγιστες διατμητικές τάσεις, γνωρίζουμε ότι αυτές εμφανίζονται σε επίπεδα τα οποία προκύπτουν με στροφή κατά 45° ΑΔΩ ως προς το κύριο σύστημα. Οι δε μέγιστη διατμητική δύναμη μας δίδεται εκ του τύπου:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2} = \frac{|324 + 524|}{2} = 424 N / cm^2$$

Το σύστημα που προκύπτει είναι το Οx″y″.

γ) Τα επίπεδα που είναι κάθετα στον άξονα των z είναι ελεύθερα ορθών τάσεων. Υπάρχουν και άλλα επίπεδα παράλληλα στον άξονα των z και τα οποία ζητάμε.

Ας υποθέσουμε ότι εκτελούμε τυχαία στροφή από το κύριο σύστημα κατά γωνία θ, και ότι πάμε σε ένα άλλο σύστημα Οx′y′. Τότε σύμφωνα με τον τύπο στροφής θα είναι:

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2}{4}} \quad =-100\pm 424\cos 2\theta.$$

Θέλουμε να μην υπάρχουν ορθές τάσεις, άρα $-100\pm424\cos2\theta=0 \Rightarrow \cos2\theta =\pm 0,24 \Rightarrow \theta=\pm38,12°$. Επομένως αρκεί να στρέψουμε το κύριο σύστημα κατά 38,12° ΑΔΩ ή κατά 38,12° ΣΔΩ για να πάρουμε επίπεδα ελεύθερα ορθών τάσεων. Οι δε διατμητικές τάσεις θα υπολογιστούν σύμφωνα με τους γνωστούς τύπους στροφής. Αν όμως πάμε να τους εφαρμόσουμε από το κύριο σύστημα προς αυτό που πήραμε, θα δούμε ότι δε βγαίνει αποτέλεσμα.

Είναι επιτακτική η ανάγκη να υπολογιστούν οι διατμητικές τάσεις εκτελώντας τελικά στροφή από το Οxy στο Οx′y′ δηλαδή κάνοντας στροφή κατά θ=15,7 ΣΔΩ ή κατά 60,7° ΑΔΩ, οι τύποι στροφής θα μας δώσουν:

τ_{max} = -412 N/cm^2 (για στροφή 15,7° ΣΔΩ)

τ_{max} = 412 N/ cm^2 (για στροφή 60,7° ΑΔΩ)

Κεφάλαιο 4ο: Στρέψη

Άσκηση 4.1

Ο χαλύβδινος συμπαγής κυκλικός άξονας ενός πλοίου πρέπει να διαστασιοποιηθεί έτσι ώστε για τη μέγιστη ροπή στρέψεως η μέγιστη διατμητική τάση να μην υπερβαίνει την επιτρεπόμενη $\tau_{επ}$=40N/mm^2 και η γωνία στρέψεως θ να μην υπερβαίνει την τιμή 0,25°/m. Πόση πρέπει να ληφθεί η διάμετρος του άξονα για $G=8{,}1*10^4$ N/mm^2 και ποια μέγιστη ισχύ L μπορεί να μεταφέρει αυτός για ν=80 στροφές το λεπτό; Πόση είναι η μέγιστη σχετική γωνία στροφής μεταξύ των ακραίων διατομών αν το μήκος του άξονα είναι l=16m;

Λύση:

Γενικά ισχύει για τη διατμητική τάση:

$\tau_{\varepsilon\pi} = \dfrac{M_x}{I_\pi} R$ όπου I_Π η πολική ροπή αδράνεια ίση με $\pi R^4/2$. Άρα η σχέση γράφεται:

$\tau_{\varepsilon\pi} = \dfrac{2M_x}{\pi R^3}$ όπου ζητάμε το R ή μάλλον το 2R και δεν γνωρίζουμε ακόμα την M_X.

Επίσης $M_X = G\, I_\pi\, \theta \Rightarrow \theta = M_X/GI_\Pi$. Αλλά $\theta \leq 0{,}25*16=4° \Rightarrow \theta \leq 4\pi/180$.

Έτσι από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$R \geq \dfrac{40*720*10^3}{8{,}1*10^4\pi}(mm) = 113mm$ οπότε Δ≥226 δηλαδή μπορούμε να πάρουμε 230mm διάμετρο για ασφάλεια.

Για τη μέγιστη ροπή στρέψεως έχουμε:

$M_t = 9,56 * 10^7$ Nmm και $L_{max} = M_t * \omega = M_t * 2\pi\nu = 9,56 * 10^7 * 2 * \pi * 80/60 \Rightarrow L_{max} = 800kW$. Τέλος όσον αφορά τη σχετική στροφή φ, παίρνουμε:

$\varphi_{max} = M_t * l / G * I_o = 0,06873$ rad ή $3,94°$.