Φώτης Φωτόπουλος – Αριστοτέλης Χαραλαμπάκης

Πιθανότητες

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

ΟΡΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΑΘΗΝΑ 1996

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τους φοιτητές του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου και καλύπτουν πλήρως το τμήμα του μαθήματος Στατιστική – Πιθανότητες που αναφέρεται στις πιθανότητες. Σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να δοθούν με σαφήνεια και απλότητα όλες οι έννοιες και οι εφαρμογές που περιέχονται στο μάθημα των πιθανοτήτων διατηρώντας όμως παράλληλα την επιστημονική αυστηρότητα και ευκρίνεια που πρέπει να διέπει τέτοιες προσπάθειες.

Οι σημειώσεις αυτές δεν εκδόθηκαν ποτέ από τον εκδοτικό οίκο που είχε αναλάβει την προώθηση των σημειώσεων για τους φοιτητές ΕΜΠ. Ωστόσο, λόγω των εκτεταμένων δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στο μάθημα αυτό αλλά και για την ενδυνάμωση αυτών που επιθυμούν την περαιτέρω εξάσκηση στον τομέα αυτόν, αποφασίστηκε η έκδοσή τους για πρώτη φορά σε ηλεκτρονική μορφή. Ελπίζουμε η δουλειά αυτή να φανεί χρήσιμη σε όλους τους φοιτητές που ασχολούνται με τις πιθανότητες.

Φ. Φωτόπουλος
Α. Χαραλαμπάκης

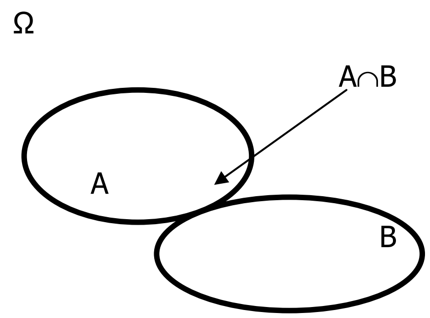
Κεφάλαιο 1ο: Πιθανότητες

Άσκηση 1.1

Αν είναι $P(A')=0,3$, $P(B)=0,4$ και $P(A\cap B')=50\%$ τότε να βρείτε:

- την πιθανότητα $P(A)$
- την πιθανότητα $P(A\cap B)$
- την πιθανότητα $P(A\cup B)$.

Λύση:



Σε τέτοιες ασκήσεις, είναι εν γένει χρήσιμο να κάνουμε ένα διάγραμμα Venn.

α) Είναι $A=\Omega-A' \Rightarrow P(A)=P(\Omega)-P(A') \Rightarrow P(A)=1-P(A')=1-0,3 \Rightarrow P(A)=0,7$.

β) Από το διπλανό διάγραμμα Venn προκύπτει ότι:

$$A=A\cap B'\cup A\cap B \Rightarrow P(A) = P(A\cap B') + P(A\cap B) \Rightarrow 0,7 = 0,5+ P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B) = 0,2.$$

γ) Επίσης, από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,7 + 0,4 - 0,2 \Rightarrow P(A\cup B) = 0,9.$$

Άσκηση 1.2

Αν P(A)=x, P(B)=y και P(AB)=z και ορίσουμε ως C={ακριβώς ένα από τα A και B}, να βρεθεί η P(C)=;

Λύση:

Καταρχήν πρέπει να θυμίσουμε ότι οι συμβολισμοί P(AB) και $P(A \cap B)$ είναι το ίδιο και το αυτό. Έπειτα είναι χρήσιμο το διάγραμμα του Venn. Η έκφραση ακριβώς ένα από τα A και B σημαίνει την ένωση των A και B από την οποία έχουμε αφαιρέσει την τομή των.

Με άλλα λόγια, έχουμε $C= P(A \cup B) - P(AB)$. Με τη βοήθεια του προσθετικού νόμου αυτό γράφεται ως εξής: $C= P(A) + P(B) - P(AB) - P(AB) = P(A) + P(B) - 2P(AB) \Rightarrow P(C) = x+y-2z$ που είναι και η ζητούμενη πιθανότητα.

Ένας άλλος τρόπος σκέψης θα ήταν να σκεφτούμε ότι $C = AB' + A'B$. Όμως εκ του διαγράμματος Venn προκύπτει ότι $A=AB \cup AB'$ και $B=AB \cup A'B$. Συνεπώς θα έχουμε και $P(A)= P(AB) + P(AB') \Rightarrow P(AB') = x-z$ και ομοίως $P(B)=(AB) + P(AB') \Rightarrow P(AB') = y-z$. Τότε από την αρχική σχέση θα παίρναμε $C = P(AB') + P(A'B) = x-z+y-z \Rightarrow P(C)= x+y-2z$, δηλαδή καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκηση 1.3

Αν Α,Β,Γ είναι τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα, να δείξετε ότι

$$P(A \setminus B) \geq P(A \setminus B\Gamma) * P(\Gamma \setminus B)$$

Λύση:

Θα αρχίσουμε από το δεύτερο μέλος της προς απόδειξη σχέσης:

$$P(A \setminus B\Gamma) * P(\Gamma \setminus B) = \frac{P(AB\Gamma)}{P(B\Gamma)} \frac{P(\Gamma B)}{P(B)} = \frac{P(AB\Gamma)}{P(B)} \leq \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A \setminus B)$$

και τούτο ισχύει γιατί η τομή τριών συνόλων Α,Β,Γ είναι εν γένει μικρότερη (ή ίση στην περίπτωση που το Γ είναι ξένο με τα Α,Β) από την τομή δυο εξ'αυτών.

Άσκηση 1.4

Αν A,B δυο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους και P(A)=1/3, P(B)=1/4, να βρείτε τα P(A\A∪B) και P(B\A∪B).

Λύση:

Κατά τα γνωστά έχουμε:

$$P(A \setminus A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{4}{7}.$$

καθότι τα A και B είναι ξένα μεταξύ τους και έτσι ο προσθετικός νόμος για την ένωσή των είναι P(A∪B) = P(A) + P(B) = 4/7.

Εντελώς ανάλογα έχουμε:

$$P(B \setminus A \cup B) = \frac{P(B(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

Άσκηση 1.5

Δίνονται δυο δοχεία Δ_1 και Δ_2 που στο πρώτο έχουμε 2 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες και στο δεύτερο 3 άσπρες και 2 μαύρες μπάλες. Μεταφέρω ένα σφαιρίδιο από το Δ_1 στο Δ_2 και εν συνεχεία παίρνω ένα από το Δ_2. Ζητούνται:

- Ποιά η πιθανότητα το τελευταίο να είναι άσπρο;
- Αν το τελευταίο είναι άσπρο, ποιά η πιθανότητα να είναι και το 1ο άσπρο;

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι A είναι το ενδεχόμενο να πάρω άσπρο σφαιρίδιο από το $Δ_1$ και B το ενδεχόμενο να πάρω άσπρο σφαιρίδιο από το $Δ_2$. Σε πρώτη φάση ζητούμε το P(B). Σύμφωνα με το νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε:

$P(B) = P(B\backslash A)P(A) + P(B\backslash A')P(A') = (4/6)\ (2/4) + (3/6)\ (\ 2/4) = 7/12.$

Δηλαδή, μπορεί να πάρω από το $Δ_1$ μαύρο σφαιρίδιο και κατόπιν να πάρω άσπρο από το $Δ_2$, ή να πάρω άσπρο από το $Δ_1$ και στη συνέχεια πάλι άσπρο από το $Δ_2$.
Τώρα, δεδομένου ότι πήρα άσπρο από το $Δ_2$, ποιά η πιθανότητα να έχω πάρει άσπρο και από το $Δ_1$; Όταν ακούμε τη λέξη "δεδομένου" σκεφτόμαστε τη δεσμευμένη πιθανότητα. Έτσι χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$P(A\backslash B) = P(B\backslash A)\ P(A)/P(B)$, όπου P(B) η πιθανότητα η ολική που βρήκαμε πριν.
$\Rightarrow P(A\backslash B) = (4/6)(2/4)/(7/12) = 4/7.$

Άσκηση 1.6

Ποια η πιθανότητα στο ΛΟΤΤΟ συμπληρώνοντας μια και μόνο εξάδα να έχω τέσσερα σωστά νούμερα;

Λύση:

Σε αυτήν την εφαρμογή άμεσου και πρακτικού ενδιαφέροντος, πρέπει να γνωρίζουμε ότι από τα 49 νούμερα, οι δυνατές εξάδες είναι όσες οι συνδυασμοί των ανά 6. Εμείς θέλουμε από τα 6 ευνοϊκά τα τέσσερα χωρίς να μας νοιάζει με ποια σειρά να τα πετύχουμε (άρα και πάλι θέμα συνδυασμών), και από τα υπόλοιπα 49-6=43 οποιαδήποτε 2 με οιαδήποτε σειρά.

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι πολύ σημαντικό να διαχωρίσουμε την έννοια των διατάξεων από αυτή των συνδυασμών. Διάταξη έχουμε όταν μας ενδιαφέρει η σειρά των αποτελεσμάτων, αλλιώς έχουμε συνδυασμούς.

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε θα είναι:

$$P = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{6!}{4!(6-4)!}\frac{43!}{(43-41)!2!}}{\frac{49!}{(49-6)!6!}} \approx 1\%o$$

Άσκηση 1.7

Έχω 28 φοιτητές εκ των οποίων οι 12 είναι φοιτήτριες. Θα εκλεγούν μόνον οι πέντε. Ποιά η πιθανότητα να υπάρχει ανδροκρατία; (τουλάχιστον 3 φοιτητές)

Λύση:

Καταρχήν μπορούν να υπάρχουν 3 άνδρες - 2 γυναίκες, 4 άνδρες - 1 γυναίκα, 5 άνδρες και καμία γυναίκα. Το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών είναι 28 ανά 5, ενώ οι σκέψεις που γίνονται είναι ανάλογες της προηγούμενης άσκησης. Επομένως θα πάρουμε:

$$P = \frac{\binom{16}{3}\binom{12}{2}}{\binom{28}{5}} + \frac{\binom{16}{4}\binom{12}{1}}{\binom{28}{5}} + \frac{\binom{16}{5}\binom{12}{0}}{\binom{28}{5}} \approx 0{,}64$$

Άσκηση 1.8

Τέσσερα γράμματα τοποθετούνται τυχαία σε τέσσερις φακέλους. Να υπολογίσετε την πιθανότητα κανένα γράμμα να μην πάει στο σωστό φάκελο.

Λύση:

Έστω $A_κ$ = { το ενδεχόμενο το κ γράμμα να πάει στον κ φάκελο }. Αν P(κανένα στο σωστό) είναι το ζητούμενο, τότε θα πάρουμε:

P(κανένα στο σωστό) = 1 - P(τουλάχιστο ένα στο σωστό) = 1 - $P(A_1)$ - $P(A_2)$ - $P(A_3)$ - $P(A_4)$ + $P(A_1A_2)$ + $P(A_1A_3)$ + $P(A_1A_4)$ + $P(A_2A_3)$ + $P(A_2A_4)$ + $P(A_3A_4)$ - $P(A_1A_2A_3)$ - $P(A_1A_2A_4)$ - $P(A_1A_3A_4)$ - $P(A_2A_3A_4)$ + $P(A_1A_2A_3A_4)$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε:

$P=1- 4P(A_1) + 6P(A_1A_2) - 4P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_3A_4)$ (1)

Αρκεί να υπολογίσουμε αυτές τις τέσσερις πιθανότητες. Προφανώς έχουμε να κάνουμε με μεταθέσεις. Για να είναι συνδυασμοί ή διατάξεις θα έπρεπε το πλήθος των γραμμάτων να ήταν διάφορο (μεγαλύτερο ή μικρότερο) του πλήθους των φακέλων.

$P(A_1) = 3!/4! = 1/4$.
$P(A_1A_2) = 2!/4! = 1/12$.
$P(A_1A_2A_3) = 1!/4! = 1/24$.
$P(A_1A_2A_3A_4) = 0!/4! = 1/24$.

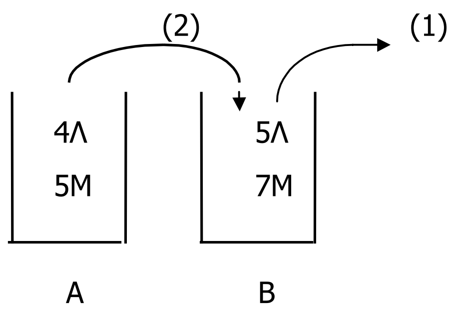
Υπενθυμίζουμε ότι 0!=1. Τώρα αντικαθιστώντας στην (1) εκλαμβάνουμε:

$P= 1-1 + 6/12 -4/24 +1/24 =9/24$.

Άσκηση 1.9

Δίδονται τα δυο δοχεία του σχήματος. Παίρνω δυο σφαιρίδια από το Α και τα τοποθετώ στο Β. Κατόπιν παίρνω ένα σφαιρίδιο από το Β. Να υπολογισθεί α) η πιθανότητα να είναι μαύρο, β) δεδομένου ότι το τελευταίο είναι μαύρο, ποια η πιθανότητα τα δυο σφαιρίδια που πήρα από το Α να ήταν λευκά;

Λύση:



α) Ας υποθέσουμε ότι είναι Α το ενδεχόμενο να είναι μαύρο το τελευταίο σφαιρίδιο. Τότε μπορεί να πήρα μαύρο αφού προηγουμένως από το δοχείο (Α) είχα πάρει 2 μαύρα, 2 λευκά , 1 λευκό και ένα μαύρο σφαιρίδιο.

P(Α)= P(Α\ΛΛ)P(ΛΛ) + P(Α\ΜΜ) P(ΜΜ) + P(Α\ΛΜ)P(ΛΜ).

Είναι $P(\Lambda\Lambda) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{5}{0}}{\binom{9}{2}}$, $P(MM) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{4}{0}}{\binom{9}{2}}$ και $P(\Lambda M) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$.

Τότε P(Α\ΛΛ) = 7/14, P(Α\ΜΜ) = 9/14 και P(Α\ΛΜ) = 8/14.

Βρίσκουμε με αντικατάσταση P(A)=0,579.

β) P(ΛΛ\Α) = P(Α\ΛΛ) P(ΛΛ) / P(A) = 0,144 (θεώρημα Bayes).

Άσκηση 1.10

Είσοδος δυαδικού συστήματος επικοινωνίας δηλώνεται από μεταβλητή X που παίρνει τιμή 0 ή 1 με πιθανότητες 3 /4 και 1 /4 αντίστοιχα. Λόγω των σφαλμάτων που προκαλεί ο θόρυβος του συστήματος, η έξοδος Y διαφέρει από την είσοδο X. Δίνονται ότι P(Y=1\X=1)=3 /4 και P(Y=0/X=0)=7 /8. Ζητούνται α) P(Y=1), P(Y=0) ,β) P(X=1\Y=1).

Λύση:

α) Θα έχουμε Y=1 όταν X=0 (σφάλμα εκπομπής) αλλά και όταν η έξοδος γίνει κανονικά δηλαδή X=1. Άρα:

P(Y=1) = P(Y=1\X=1) P(X=1) + P(Y=1\X=0) P(X=0) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ P(Y=1) = (3/4) (1 /4) + (1-7/8) (3/4) = 9/32.

Το μόνο δύσκολο σημείο είναι ο καθορισμός του P(Y=1\X=0) καθόσον τα υπόλοιπα δίδονται. Σκεφτόμαστε ως εξής. Όταν το X είναι 0, το Y θα είναι είτε 0 (σωστή μετάδοση) είτε 1 (σφάλμα εκπομπής) . Τα δυο αυτά ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά καθώς άλλη περίπτωση δεν υπάρχει. Άρα θα είναι P(Y=1\X=0)=1-P(Y=0\X=0)=1-7/8 = 1/8. Ανάλογα:

P(Y=0) = P(Y=0\X=0) P(X=0) + P(Y=0\X=1)P(X=1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ P(Y=0) = (7/8) (3/4) + (1-3/4)(1/4) = 23/32.

β) Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Bayes.

$$P(X=1\backslash Y=1)=\frac{P(Y=1\backslash X=1)P(X=1)}{P(Y=1)}=\frac{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}{\frac{9}{32}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Άσκηση 1.11

Σε μια συγκεκριμένη διαδρομή η πιθανότητα ένα φανάρι να είναι του ιδίου χρώματος με το προηγούμενο είναι p. Αν το πρώτο είναι πράσινο με πιθανότητα α και το δεύτερο κόκκινο με πιθανότητα 1-α, να υπολογίσετε την πιθανότητα το τρίτο να είναι πράσινο.

Λύση:

Θα ονομάσουμε A_K το ενδεχόμενο το κ φανάρι να είναι πράσινο. Τότε:

$P(A_3) = P(A_3\backslash A_2)\ P(A_2) + P(A_3\backslash A_2')P(A_2')$.

Από την παραπάνω σχέση ξέρουμε ότι $P(A_2')=1-α$ και $P(A_3\backslash A_2) = p$.
Ομοίως για το πρώτο και δεύτερο φανάρι παίρνουμε:

$P(A_2) = P(A_2\backslash A_1)\ P(A_1) + P(A_2\backslash A_1')\ P(A_1') \Rightarrow P(A_2) = p\ α + (1-p)\ (\ 1-α)$.

Άρα παίρνουμε από την αρχική σχέση ότι:

$P(A_3) = p\ [\ pα + (1-p)(1-α)] + (1-p)[1-αp - (1-p)(1-α)] \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A_3) = α + 2(1-2α)\ p\ (1-p)$.

Βλέπουμε ότι το όλο πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό του $P(A_2)$ γιατί τότε θα είναι $P(A_2') = 1-P(A_2)$. Αυτό συμβαίνει γιατί το δεύτερο φανάρι είναι εξαρτημένο από το χρώμα που θα έχει το πρώτο, ενώ το πρώτο είναι εντελώς ανεξάρτητο από τα άλλα δυο. Όμοια το τρίτο είναι εξαρτημένο από το χρώμα που θα έχει το προηγούμενό του, δηλαδή το δεύτερο, που με τη σειρά του είναι εξαρτημένο από το χρώμα του πρώτου.

Κεφάλαιο 2ο: Τυχαίες Μεταβλητές Και Κατανομές Αυτών

Άσκηση 2.1

Ζητώ το a ώστε να είναι η P συνάρτηση πιθανότητας.

$$P(X)=\begin{cases}\dfrac{2x}{a}, x=1,2,\dots,k\\ 0,\alpha\lambda\lambda o\upsilon\end{cases}$$, a>0.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι οι δυο συνθήκες που πρέπει να ισχύουν είναι:

P(X)>0 ∀x και Σ P(X) =1.

Η πρώτη σαφώς ισχύει (a,x>0). Για τη δεύτερη έχω διαδοχικά:

$$\sum_{n=1}^{k} P(X)=\sum_{n=1}^{k}\frac{2x}{a}=\frac{2}{a}(1+2+\ldots+k)=\frac{2}{a}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{a}=1\Rightarrow a=k(k+1).$$

Άσκηση 2.2

Ζητώ το a για να είναι η P(X) συνάρτηση πιθανότητας (a>0).

$$P(X)=\begin{cases}ax^2, x=1,2,\dots k\\ 0,\alpha\lambda\lambda o\upsilon\end{cases}$$

Λύση:

Ο μαθηματικός λογισμός είναι όμοιος με την προηγούμενη άσκηση. Έτσι:

$$\sum_{n=1}^{k} ax^2=a(1^2+2^2+\ldots+k^2)=a\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=1\Rightarrow a=\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Άσκηση 2.3

Για την παρακάτω συνάρτηση να δείξετε ότι είναι σ.π.π. Ποια η P(x>0) και ποια η P(|x|>1/2)=;

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x|<1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} \quad \mathrm{a}>0$$

Λύση:

Εδώ, η μια συνθήκη ότι f(x)≥0 ∀x παραμένει ως έχει, και προστίθεται η συνθήκη το ολοκλήρωμα της f από -∞ ως +∞ να είναι μονάδα. Η πρώτη σαφώς ικανοποιείται. Για τη δεύτερη συνθήκη παίρνουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{+1} (1-|x|)dx = \int_{-1}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx = 1$$

Άρα η συνάρτηση f(x) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$P(x>0) = \int_{0}^{1} (1-x)dx = x - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(|x| > \frac{1}{2}) = \int_{-1}^{-1/2} (1+x)dx + \int_{1/2}^{1} (1-x)dx = 1/8 + 1/8 = 1/4.$$

οι ζητούμενες πιθανότητες.

Άσκηση 2.4

Μια μεταβλητή έχει πυκνότητα (επομένως καταλαβαίνουμε ότι είναι συνεχής) $f(x) = \begin{cases} \theta\, e^{-\theta x}, x>0 \\ 0, x<0 \end{cases}$,. Να προσδιορισθεί το θ όταν P(X≤1)=P(X>1). Επίσης να βρείτε την πιθανότητα P(X>2\X>1).

Λύση:

Αφού η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ικανοποιεί τις δυο γνωστές συνθήκες. Από την πρώτη προκύπτει θ>0. Από τη δεύτερη έχουμε:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{x}\theta\,\mathrm{e}^{-\theta\,\mathrm{x}}dx=-\int_{0}^{x}e^{-\theta\,\mathrm{x}}d(-\theta\,\mathrm{x})=-e^{-\theta\,\mathrm{x}}\Big|_{0}^{+x}=-e^{-\theta\,\mathrm{x}}+1,x>0$$

Βρήκαμε την F(x). Αφού P(X≤1)=P(X>1)=1- P(X≤1) ⇒ 2 P(X≤1)=1 ⇒ P(X≤1)=1/2. Άρα F(1)-F(0)=1/2 ⇒ -e$^{-θ}$ +1 +1-1 =1/2 ⇒-e$^{-θ}$=-1/2 ⇒ -θ =-Ln2 ⇒ θ = Ln2.

Μας συμφέρει να πάμε μέσω της F(x). Δηλαδή, αντί για τη διαδικασία αυτή, θα μπορούσαμε κάλλιστα να είχαμε πάρει το ολοκλήρωμα της f(x) από 0 ως 1 για να βρούμε το θ. Όμως αργότερα θα έπρεπε να πάρουμε και άλλα ολοκληρώματα για τον προσδιορισμό της πιθανότητας P(X>2\X>1) πράγμα επίπονο και χρονοβόρο.

Τώρα έχουμε:

$$P(X>2\setminus X>1)=\frac{P(X>2\cap X>1)}{P(X>1)}=\frac{P(X>2)}{P(X>1)}=\frac{1-P(X\le 2)}{1-P(X\le 1)}=\frac{1-F(2)}{1-F(1)}=\frac{1}{2}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι είναι πολύ χρήσιμη η σχέση P(A)=1-P(A′) γιατί η πιθανότητα P(X≤a) ισούται με F(a), ενώ η P(X>a) δεν βρίσκεται απλά χωρίς τη χρήση του παραπάνω τύπου.

Άσκηση 2.5

Η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει ποσότητα βενζίνης σε χιλιάδες lt. με συνάρτηση πυκνότητας - πιθανότητας:

$$f(x)=\begin{cases} cx,\ 0\le \mathrm{x}\le 1 \\ \mathrm{c},\ \ 1\le x\le 2 \\ c(3-x),\ \ \ 2\le \mathrm{x}\le 3 \\ 0,\ \ \ 3\le \mathrm{x}\le \infty \end{cases}$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες P(X≤3/4) , P(1/2≤X≤5/2), P(x>9/4).

Λύση:

Για να είναι η f(x) σππ πρέπει το παρακάτω ολοκλήρωμα να είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 cxdx + \int_1^2 cdx + \int_2^3 c(3-x)dx = c\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + cx\Big|_1^2 + 3cx\Big|_2^3 - c\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{c}{2} + c + 3c - \frac{9c}{2} + \frac{4c}{2} =$$

$$= 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Προχωρούμε στην εύρεση των ζητούμενων πιθανοτήτων. Έχουμε διαδοχικά:

$$P(X \le 3/4) = \int_0^{3/4} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{3/4} = \frac{9}{64}$$

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{x}{2}dx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx + \int_2^{5/2} \frac{3-x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{x}{2}\Big|_1^2 + \frac{3x - \frac{x^2}{2}}{2}\Big|_2^{5/2} = \frac{7}{8}$$

$$P(X > 9/4) = \int_{9/4}^{3} \frac{3-x}{2}dx = \frac{3x}{2}\Big|_{9/4}^{3} - \frac{x^2}{4}\Big|_{9/4}^{3} = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + \frac{81}{64} = \frac{9}{64}$$

Άσκηση 2.6

Η τυχαία μεταβλητή Χ δείχνει το μηνιαίο εισόδημα ενός υπαλλήλου με πυκνότητα $f(x) = \frac{c}{x^{\theta+1}}$, α≤ x ≤ ∞ (α,θ>0). Ζητούνται α) να βρεθεί η σταθερά c, β) Ποιά η F(x); , γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα P(β< X < λβ) όπου β>α και λ>1.

Λύση:

α) Το θέμα μας λέει πως η τμ Χ δείχνει το μηνιαίο εισόδημα με πυκνότητα, και άρα είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και θα ικανοποιεί τις δυο συνθήκες που πρέπει οι συναρτήσεις αυτού του είδους να πληρούν. Από την πρώτη c>0 ενώ από τη δεύτερη:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} \frac{c}{x^{\theta+1}}dx = -\frac{c}{\theta}\, x^{-\theta}\Big|_a^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{c}{\theta}a^{-\theta}\right) = \frac{ca^{-\theta}}{\theta} = 1 \Rightarrow c = \theta\, a^{-\theta}$$

β) Για να βρούμε την F(x), αρκεί να ολοκληρώσουμε από μείον άπειρο ως x.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{\theta\ a^{-\theta}}{x^{\theta+1}}dx = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{\theta}$$ που είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

γ) Έχω διαδοχικά με λογική όμοια με της προηγούμενης άσκησης:

$$P(\beta \le x \le \lambda\,\beta) = P(\lambda\,\beta) - P(\beta\ ) = F(\lambda\,\beta) - F(\beta\ ) = \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\theta}\left(1-\frac{1}{\lambda^{\theta}}\right)$$

Άσκηση 2.7

Αν η τυχαία μεταβλητή έχει πυκνότητα $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$, και συνάρτηση κατανομής $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$, να βρεθεί η κατανομή g(y) της Y=- lnX.

Λύση:

Σε τέτοιες ασκήσεις, η διαδικασία είναι πανομοιότυπη. Αρχίζουμε από το G(y) και προσπαθούμε να λύσουμε ως προς x. Έτσι έχουμε:

$G(y) = P(Y \le y) = P(-Lnx \le y) = P(Lnx \ge -y) = P(x \ge e^{-y}) = 1 - P(x < e^{-y}) = 1 - F(e^{-y})$.

όταν $x \ge 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow -\ln x < 0 \Rightarrow y < 0$, $F(e^{-y}) = 1$

όταν $x < 0 \Rightarrow$ δεν ορίζεται λογάριθμος

όταν $0 \le x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow -\ln x > 0 \Rightarrow y > 0$, $F(e^{-y}) = e^{-y}$.

Μετά τα παραπάνω προκύπτει: $G(y) = \begin{cases} 1-e^{-y}, y > 0 \\ 0, y < 0 \end{cases}$.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και βρίσκουμε την κατανομή g(y) της Y=-lnX.

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y}, y > 0 \\ 0, y < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.8

Αν X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή σε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$, να βρεθεί η κατανομή g(y) της $Y=X^2$.

Λύση:

Ακολουθούμε ακριβώς τη διαδικασία που εφαρμόσαμε κατά την επίλυση της 2.7. Εδώ η άσκηση δεν χωρίζει σε πεδία της f(x) συνεπώς είναι απλούστερη. Έχουμε:

$G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(|X| \le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$.

Γνωρίζουμε όμως ότι g(y)=G′(y). Επειδή επίσης είναι

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow F'(x)=f(x)$$

έπεται ότι η παραπάνω σχέση θα δώσει:

$$g(y)=G'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}F'(\sqrt{y})-\left(\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right)F'(-\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right]=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}$$

οπότε έχουμε τελικά $g(y)=\frac{1}{\sqrt{2y\pi}}e^{-\frac{y}{2}}$.

Άσκηση 2.9

Η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$ (Cauchy). Να βρεθεί η κατανομή g(y) της Y=1/X.

Λύση:

Κατά τη γνωστή μεθοδολογία που έχουμε ακολουθήσει ως τώρα σε ασκήσεις αυτού του είδους, έχουμε:

G(y) = P(Y ≤ y) = P(1/X ≤ y) = P(X ≥ 1/y) = 1- P(X < 1/y) = 1-F(1/y).

Όμως τότε θα είναι $g(y) = G'(y) = -\left(\frac{1}{y}\right)' F'(1/y) = \frac{1}{y^2} f(1/y) = \frac{1}{y^2} \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ που είναι η ζητούμενη κατανομή.

Άσκηση 2.10

Η διακύμανση του ηλεκτρικού ρεύματος μπορεί να θεωρηθεί συνεχής τυχαία μεταβλητή X που κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα [10,12]. Είναι στο διάστημα αυτό f(x)=1/2 όπου x∈[10,12] και 0 αλλού. Αν το ρεύμα αυτό διέρχεται από αντίσταση 2Ω, να προσδιορισθεί η συνάρτηση κατανομής της ισχύος $Y=2X^2$.

Λύση:

Θα την επιλύσουμε με δυο τρόπους. Αρχίζουμε με τη γνωστή μεθοδολογία που έχουμε αναφέρει για ασκήσεις αυτού του είδους.

$$G(y) = P(Y \le y) = P(2X^2 \le y) = P(X^2 \le \frac{y}{2}) = P(-\sqrt{\frac{y}{2}} < X < \sqrt{\frac{y}{2}}) = F(\sqrt{\frac{y}{2}}) - F(-\sqrt{\frac{y}{2}})$$

οπότε η σχέση αυτή δίνει κατά τα γνωστά:

$$g(y) = G'(y) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{y}{2}}} F'(\sqrt{\frac{y}{2}}) - \frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{y}{2}}} F'(-\sqrt{\frac{y}{2}}) = \frac{1}{4\sqrt{y/2}}(\frac{1}{2}+0) = \frac{1}{8\sqrt{y/2}}.$$

(επειδή f(y)=0 αν y<0 και f(y)=1/2 αν y∈[10,12])

Ο άλλος τρόπος στηρίζεται στο εξής θεώρημα:

<u>Αν Χ μια τυχαία μεταβλητή και y=h(x) αυστηρά μονότονη, τότε η πυκνότητα δίδεται εκ του τύπου</u> $g(y) = f(h^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)\right|$.

Επομένως θα είναι στο παράδειγμα αυτό:

$$x = h^{-1}(y) = \sqrt{y/2} \Rightarrow \left|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)\right| = \frac{1}{2*2\sqrt{y/2}} \Rightarrow g(y) = f(x)\left|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)\right| = \frac{1}{8\sqrt{y/2}}$$

Άσκηση 2.11

Ζητείται να δειχθεί αν υπάρχει συνάρτηση πιθανότητας μεταξύ των Χ,Υ.

Υ\Χ	**1**	**2**	**3**	**4**
-1	0,1	0	0,05	0,05
0	0	0,1	0	0,1
1	0,4	0,2	0	0

Λύση:

Ας πάρουμε το ζεύγος (Χ,Υ)=(2,0). Είναι P(X=2\Y=0)=0,1. Αλλά P(X=2)=0+0,1+0,2 = 0,3. Επίσης P(Y=0)= 0+0,1+0+0,1 = 0,2.

Βλέπουμε τώρα ότι P(X=2)P(Y=0) = 0,06 $\neq$ 0,1 = P(X=2\Y=0) άρα συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση πυκνότητας - πιθανότητας.

Άσκηση 2.12

Να εξετάσετε αν οι Χ,Υ είναι ανεξάρτητες.

Y_i \ X_i	**1**	**3**	**5**
2	0,10	0,05	0,15
4	0,10	0,15	0,10
6	0,05	0,10	0,20

X	1	3	5		Y	2	4	6
$P_x(x)$	0,25	0,30	0,45		**$P_y(y)$**	0,30	0,35	0,35

Λύση:

Θεωρούμε το (X,Y)=(1,2). Θα είναι $P_x(1)P_y(2)$=0,25 * 0,30 = 0,075. Επίσης από τον πρώτο πίνακα τιμών έχουμε $P_{x,y}$ (1,2) = 0,10. Βλέπουμε ότι $P_x(1)P_y(2) \neq P_{x,y}(1,2)$ που όμως σημαίνει ότι οι μεταβλητές X,Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 2.13

Οι τυχαίες μεταβλητές X,Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) :

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις και οι δεσμευμένες f_x (x) , f_y(y) , $f_{x\backslash y}$ (x\y) και $f_{y\backslash x}$ (y\x).

Λύση:

Για να βρούμε τις ζητούμενες περιθώριες και δεσμευμένες πιθανότητες, εφαρμόζουμε διαδοχικά τα γνωστά από τη θεωρία ολοκληρώματα που μας τις παρέχουν.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 8xydy = \int_0^x 8xydy = 8x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x = 4x^3$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 8xydx = \int_y^1 8xydx = 8y\frac{x^2}{2}\bigg|_y^1 = 4y(1-y^2)$$

$$f_{x\backslash y}(x \backslash y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2}$$

$$f_{y\backslash x}(y \backslash x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{8xy}{4x^3} = \frac{2y}{x^2}$$

Σημειώνουμε ότι για τα όρια των ολοκληρώσεων θα είναι 0≤ x ≤1 & 0 ≤ y ≤ x ⇒ μας δίνουν συμπτυσσόμενες το διάστημα 0 ≤ y ≤ x ≤ 1 και επομένως y ∈ [0,x] - x ∈ [y,1]. Επίσης αξίζει να αναφέρουμε ότι για την f_x (x) το x ∈ [0,1] για την f_y (y) το y∈[0,1] , για τις δε δεσμευμένες πιθανότητες τα αντίστοιχα διαστήματα θα είναι τα x ∈ [y,1] και y ∈ [0,x].

Άσκηση 2.14

Η διδιάστατη συνεχής μεταβλητή (X,Y) έχει την πυκνότητα: $f_{x,y}(x,y) = 2$ όταν $0 \le x \le y \le 1$. Ζητούνται:

α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_x(x)$, $f_y(y)$

β) να βρεθούν οι πιθανότητες P(X>1/2) , P(Y≤1/3), P(X>1/2 \Y≤1/3)

γ) είναι οι X,Y ανεξάρτητες;

Λύση:

α) Θα χρησιμοποιήσουμε για την εύρεση των περιθωρίων συναρτήσεων πυκνότητας τα γνωστά μας από τη θεωρία ολοκληρώματα.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2dy = \int_{x}^{1} 2dy = 2(1-x), \quad x \in [0,1]$$
$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2dx = \int_{0}^{y} 2dx = 2y, \quad \mathrm{y} \in [0,1]$$

β) Για να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες, θα χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα, λαμβάνοντας υπόψη μας για τον ορισμό των ορίων των ολοκληρωμάτων ότι αυτά θα ορίζονται από τα εκάστοτε διαστήματα που αφορούν τα x,y καθώς και από τις τιμές των πιθανοτήτων που μας δίνει η εκφώνηση. Έτσι έχουμε:

$$P(x > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 2(1-x)dx = 2x - x^2 \Big|_{1/2}^{1} = 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$P(y \le \frac{1}{3}) = \int_{0}^{1/3} 2ydy = y^2 \Big|_{0}^{1/3} = \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9}$$
$$P(x > \frac{1}{2} \setminus y \le \frac{1}{3}) = \frac{P(x > \frac{1}{2} \bigcap y \le \frac{1}{3})}{P(y \le \frac{1}{3})} = 0$$

γ) <u>α' τρόπος</u>: δεν είναι ανεξάρτητες γιατί βλέπουμε ότι $f_{x,y}(x,y) \neq f_x(x)\, f_y(y)$.

β′ τρόπος: Λόγω του ότι η πιθανότητα x>1/2 όταν y≤ 1/3 είναι διάφορη του P(x>1/2) οι x,y είναι εξαρτημένες.

Άσκηση 2.15

Δίνεται η $f_{x,y}(x,y) = cx(x-y), \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x$. Αν η f $_{x,y}$ (x,y) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) να βρεθεί η σταθερά c.

Λύση:

Σύμφωνα με τη θεωρία, αφού η f $_{x,y}$ (x,y) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα πρέπει το διπλό ολοκλήρωμα αυτής να ισούται με τη μονάδα. Έτσι έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} cx(x-y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} cx(x-y)dy = \int_{0}^{2} dx \int_{-x}^{x} cx(x-y)dy = c\int_{0}^{2} 2x^3 dx = c\frac{x^4}{2}\Bigg|_0^2 = 8c$$

Πρέπει τώρα 8c=1 ή c=1/8 η ζητούμενη τιμή της σταθεράς c.

Άσκηση 2.16

Δίνεται η συνάρτηση $f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad \mathrm{x} > 1, \mathrm{y} > 1$. Να βρείτε την f $_{z,w}$ (z,w) εκτελώντας το μετασχηματισμό z=xy και w=x/y.

Λύση:

Σε τέτοιου είδους θέματα, το πρώτο που κάνουμε είναι να επιλύσουμε τους δοσμένους μετασχηματισμούς ως προς x,y:

$z = xy = (wy)y = wy^2 \Rightarrow y = \sqrt{z/w}$ και $z = xy = x\sqrt{z/w} \Rightarrow x = \sqrt{zw}$

Κατόπιν υπολογίζουμε την παρακάτω ορίζουσα:

$$J=\begin{vmatrix} x_z & x_w \\ y_z & y_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{w}{2\sqrt{zw}} & \dfrac{z}{2\sqrt{zw}} \\ \dfrac{1/w}{2\sqrt{z/w}} & \dfrac{-z/w^2}{2\sqrt{z/w}} \end{vmatrix}=\frac{w}{2\sqrt{zw}}\frac{-z/w^2}{2\sqrt{z/w}}-\frac{z}{2\sqrt{zw}}\frac{1/w}{2\sqrt{z/w}}=-\frac{1}{4w}-\frac{1}{4w}=-\frac{1}{2w}$$

Τώρα η ζητούμενη f $_{z,w}$ (z,w) θα προκύψει από τον πολλαπλασιασμό με το απόλυτο της ορίζουσας που βρήκαμε, της f $_{x,y}$ (x,y). Δηλαδή:

$$f_{z,w}(z,w)=\left|-\frac{1}{2w}\right|\frac{1}{z^2}=\frac{1}{2wz^2}\ .$$

Άσκηση 2.17

Δίδεται η συνάρτηση f $_{x,y}$ (x,y) = λ^2 e$^{-\lambda(x+y)}$. Εκτελώντας το μετασχηματισμό z=x+y και w = x-y, να βρείτε την f $_{z,w}$ (z,w).

Λύση:

Ομοίως το πρώτο βήμα είναι να λύσουμε ως προς x,y τους μετασχηματισμούς:

$$z=x+y=w+y+y=w+2y\Rightarrow y=\frac{z-w}{2},\quad z=x+y=x+\frac{z-w}{2}\Rightarrow x=\frac{z+w}{2}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα J:

$$J=\begin{vmatrix} x_z & x_w \\ y_z & y_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$ οπότε τώρα γράφουμε τη ζητούμενη συνάρτηση:

$$f_{z,w}(z,w)=\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda z}.$$

Κεφάλαιο 3ο: Μέσες Τιμές Τυχαίων Μεταβλητών

Άσκηση 3.1

Για την f(x)=cx^{2}e^{-x} , x>0 να βρεθεί η c αν η f(x) είναι συνάρτηση πυκνότητας, η μέση τιμή της E(X) και η διασπορά Var(X).

Λύση:

Αρχικά θα βρούμε την άγνωστη σταθερά c:

$$\int_0^{+\infty} cx^2e^{-x}dx = -c\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}d(-x) = -cx^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2c\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 0 - 2c\int_0^{+\infty} xe^{-x}d(-x) =$$

$$= -2cxe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2c\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 - 2ce^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0 - 2c(-1) = 2c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Για τη μέση τιμή επιλύουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{x^2}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = \ldots = 3.$$

Κατόπιν για τη διασπορά θα έχουμε:

$$Var(X) = \int_0^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-3)^2\frac{x^2}{2}e^{-x}dx.$$

Η λύση του ολοκληρώματος αυτού μας παρέχει τη ζητούμενη διασπορά.

Άσκηση 3.2

Για την f(x)=xe^{-KX} όπου x ≥ 0 και k>0, να βρεθούν: η σταθερά k, η μέση τιμή της E(X), η διασπορά Var (X) και η λοξότητα β. Είναι γνωστό ότι η f(x) είναι σπη.

Λύση:

Η άσκηση αυτή είναι <u>βασική.</u> Για τη σταθερά k θα έχω:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-kx}dx = -\frac{1}{k}\int_0^{+\infty} xe^{-kx}d(-kx) = \frac{-xe^{-kx}}{k}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx = 0 - \frac{1}{k^2}e^{-kx}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}$$

$k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow k = 1,$ αφού το k είναι θετική σταθερά.

Υπολογίζω εν συνεχεία τη μέση τιμή E(X):

$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = ... = 2$, καθόσον έχουμε ασχοληθεί πρωτύτερα με το ολοκλήρωμα αυτό. Θα βρούμε κατά τα γνωστά και τη ζητούμενη διασπορά Var(X):

$$Var(X) = \int_0^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-2)^2 xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} (x^2 - 4x + 4)xe^{-x}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx - 4\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx + 4\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 6 - 8 + 4 = 2$$

<u>Παρατήρηση 1η</u>: Είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζομε εξαρχής την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ = k!. Αυτό το ολοκλήρωμα λύνεται εν γένει με τη μέθοδο που δείξαμε, αλλά λόγω της μεγάλης συχνότητας εμφανίσεώς του, πρέπει να το γνωρίζομε.

<u>Παρατήρηση 2η</u>: Πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογίζομε τη διασπορά Var(X) με τη χρήση του παραπάνω ολοκληρώματος. Συνίσταται να υπολογίζεται αντ' αυτού με τη χρήση του ισοδύναμου τύπου:

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

Όπου Ε(X^2) είναι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ που υπολογίζεται απλά. Στο παράδειγμα αυτό θα έχουμε Ε(X^2)=6,άρα Var(X) = 6-2^2 = 2.

Η λοξότητα β δίδεται εκ του τύπου: β=μ_3/σ^3. Το σ προκύπτει απλά αν θυμηθούμε ότι Var(X)=σ^2, άρα σ^2 = 2. Επομένως θα είναι $\sigma^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

Το μ_3 προκύπτει από τον τύπο: μ_3=E[(X-E(X))^3] = E(X^3)+3E(X^2)E(E(X)) -3E(X) E[E(X)^2] - E(E(X)^3) = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2-E(X)^3, αφού ισχύει E(E(X))=E(X). Έτσι προκύπτει και ο παραπάνω τύπος του πλαισίου.

Για να βρούμε το μ_3 αρκεί να υπολογίσουμε το E(X^3) καθόσον τα λοιπά τα ξέρομε. Είναι επομένως E(X^3)= $\int_0^{+\infty} x^3 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4! = 24$.

Άρα μ_3 = 24 - 3*6*2 + 3*2*4 -2^3 = 4, άρα $\beta = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Άσκηση 3.3

Σε ένα τυχερό παιχνίδι ρίχνουμε ένα ζάρι έτσι ώστε να κερδίζουμε 9 χρηματικές μονάδες (πχ δεκαχίλιαρα) για 1 ή 2 , να χάνουμε 8 αν φέρουμε 3,4,5 και 0 για 6. Αν η τυχαία μεταβλητή X δίνει το κέρδος μετά από κάθε ρίψη, να βρεθεί η μέση τιμή E(X) και η διασπορά Var(X).

Λύση:

Θα βρούμε τις επιμέρους πιθανότητες:

X	**9**	**-8**	**0**
p(X)	2/6	3/6	1/6

Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής θα έχουμε:

$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\, p(x_i) = 9\frac{2}{6} - 8\frac{3}{6} + 0\frac{1}{6}$ =-1 δηλαδή θα χάσουμε στο τέλος.

Παρατηρούμε ότι ενώ πριν για την εύρεση της μέσης τιμής E(X) χρησιμοποιούσαμε ολοκλήρωμα, τώρα χρησιμοποιούμε άθροισμα. Αυτό συμβαίνει για τον εξής απλό λόγο: πριν είχαμε συνάρτηση f(x) που θα μπορούσε να πάρει άπειρες τιμές σε οιοδήποτε διάστημα. Εδώ έχουμε διακριτές και πάνω απ' όλα πεπερασμένες τιμές που μπορεί να πάρει η X που δίνει το κέρδος μετά από κάθε ρίψη.

Όμοια θα εφαρμόσουμε τον τύπο $Var(X)= E(X^2) - (E(X))^2$ για τη διασπορά , όπου $E(X^2)$ θα υπολογισθεί με τη βοήθεια του παρακάτω αθροίσματος:

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2\, p_i(x) = 81\frac{2}{6} + 64\frac{3}{6} + 0\frac{1}{6} = 59$.

Αξίζει τέλος να παρατηρήσουμε ότι το δεδομένο πως αν φέρουμε 6 δεν κερδίζουμε ούτε χάνουμε, δεν επηρέασε καθόλου τη μέση τιμή και τη διασπορά, κάτι που εξάλλου ήταν αναμενόμενο.

Άσκηση 3.4

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 5 φορές. Αν η τυχαία μεταβλητή X δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται το διατεταγμένο ζεύγος (Κ,Γ) να βρεθούν η κατανομή της X, η μέση της τιμή E(X) , η διασπορά της Var(X).

Λύση:

Τα δυνατά αποτελέσματα (δηλαδή το σύνολο των δυνατών διατεταγμένων πεντάδων που μπορούμε να πάρομε) είναι διάταξη με επανάληψη των 2 ανά 5 : $2^5 = 32$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα όπου το X δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται το διατεταγμένο ζεύγος (Κ,Γ):

X	**0**	**1**	**2**
p(X)	6/32	20/32	6/32

Κατά τα γνωστά έχουμε:

E(X)=0(6/32)+1(20/32)+2(6/32)=1 και Var(X)=E(X^2)-$(E(X))^2$=(20/32)+4(6/32)-1=0,375

υπενθυμίζοντας ότι λόγω του διακριτού και πεπερασμένου του πλήθους των τιμών που παίρνει η X πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άθροισμα και όχι ολοκλήρωμα.

Άσκηση 3.5

Ρίχνομε ένα νόμισμα πολλές φορές και σταματάμε όταν εμφανιστεί η όψις "Κ". Αν η τυχαία μεταβλητή X μετρά τον αριθμό των ρίψεων που απαιτούνται, να βρεθεί η κατανομή της και η μέση τιμή της.

Λύση:

Η άσκηση αυτή παρουσιάζει μια ιδιομορφία. Ναι μεν οι τιμές που μπορεί να πάρει η X είναι διακριτές και πεπερασμένες, δεν μπορούμε όμως να τις καταγράψουμε. Αν υποθέσουμε ότι επιχειρούμε κάτι τέτοιο, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε ν-διάστατο πίνακα. Παρόλα' αυτά μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

P(X=1)=P(K)=1/2

P(X=2)=P(ΓΚ)=1/4

P(X=3)=P(ΓΓΚ)=1/8

......

P(X=ν)=P(ΓΓ...ΓΚ)=1/2^{ν}.

Επειδή οι τιμές που μπορεί να πάρει η X είναι πεπερασμένες, όπως είπαμε παραπάνω θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άθροισμα και όχι ολοκλήρωμα. Άρα:

$E(X)=1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+.....+n\frac{1}{2^n}$. Το άθροισμα αυτό επιλύεται με τέχνασμα. Θέτω a=1/2:

$E(X)=1a+2a^2+3a^3+....+na^n$. Όμως ξέρουμε ότι $a+a^2+a^3+....+a^n=\frac{a}{1-a}$, όταν a<1.

Αν παραγωγίσουμε ως προς a την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$1+2a+3a^2+....+na^{n-1}=\frac{1}{(1-a)^2}\Rightarrow a+2a^2+3a^2+...+na^n=\frac{a}{(1-a)^2}$$

και άρα βρίσκουμε Ε(Χ)=2 αν αντικαταστήσουμε το α=1/2. Το αποτέλεσμα σημαίνει ότι κατά μέσο όρο στη δεύτερη ρίψη θα έλθει η όψη κορώνα, κάτι που αναμενόταν.

Άσκηση 3.6

(Εφαρμογή Τεχνικής Υδρολογίας) Κατά τις μέρες που βρέχει το ημερήσιο ύψος της βροχής μετρημένο σε ένα σταθμό σε mm βρέθηκε ότι ακολουθεί την εκθετική κατανομή $F_x(x)=1-e^{-kx}$, όπου $x \geq 0$, κ=0,05mm^{-1}. Να βρεθούν:

α) η μέση τιμή Ε(Χ) και η διασπορά Var(X)

β) η λοξότητα β και η κύρτωση γ

γ) η κορυφή και η διάμεσος

δ) ο συντελεστής μεταβλητότητας CV.

Λύση:

α) Πρέπει να προσέξουμε ότι $f(x)=F'(x)=ke^{-kx}$. Κατά τα γνωστά έχουμε:

$$m_1=\int_0^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} xke^{-kx}dx=-xe^{-kx}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx=-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k}=20.$$

Επειδή δε $E(X)=\mu_1 \Rightarrow E(X)=20$. Είναι γνωστό ότι $Var(X)=E(X^2)-[E(X)^2]$. Έτσι:

$$m_2=\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty} x^2ke^{-kx}=\frac{2!}{k^2}=800\Rightarrow Var(X)=800-400 \Rightarrow Var(X)=400 \text{ mm}^2.$$

β) Θα υπολογίσουμε τα m_3 και m_4 με τη βοήθεια παρατήρησης προηγούμενης άσκησης ή με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων. Βρίσκουμε ότι:

$m_3=\frac{3!}{k^3}=48.000,\quad m_4=\frac{4!}{k^4}=3.840.000$ οπότε τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη λοξότητα β και την κύρτωση γ.

$\mu_3 = E[(X-E(X))^3] = E(X^3) - 3E(X^2)E(E(X)) + 3E(X)E(E(X)^2) - E(E(X))^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_3 = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2 - E(X)^3 \Rightarrow \mu_3 = 16.000$

Επομένως $\beta = \dfrac{16000}{400\sqrt{400}}$ =2.

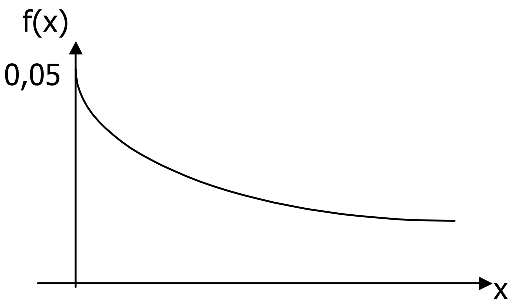
$\mu_4 = E[(X-E(X))^4] = E[(X-20)^4] = E[(X^2-40X+400)(X^2-40X+400)] =$

$= E(X^4-40X^3+400X^2 -40X^3 +1600X^2 -16000X +400X^2 -1600X-160000)=$

$= E(X^4) - 80E(X^3) +2400E(X^2) -17600 E(X) -160000 =$

$= 3.840.000 - 80*48.000 + 2400*400 - 17600*20 - 160.000 = 448.000$

Επομένως $\gamma = \dfrac{448.000}{400^2} = 2{,}8$.Θυμίζουμε ότι Var(X) = $\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = 400$.



γ) Το διπλανό σχήμα μας δίνει το γράφημα της f(x) το οποίο τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα των x, καθώς $x \to \infty$.

Από τον ορισμό της διχοτόμου (διάμεσος) έχουμε:

$P(X \leq X_{0.5})$ = 1 /2 (εξ ορισμού). Είναι $F(X_{0.5})=1/2 \Rightarrow 1-e^{-kx\ 0,5} =1/2 \Rightarrow e^{-kx\ 0,5}=1/2 \Rightarrow x_{0.5}$ = 13,9 περίπου η διάμεσος.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι επικρατούσα τιμή ή κορυφή ονομάζεται η τιμή που μεγιστοποιεί την f(x) σ.π.π. ή έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα (για διακριτή μεταβλητή). Η κορυφή επομένως για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι το 0,05.

δ) Για το συντελεστή μεταβλητότητας CV έχουμε:

$$CV = \frac{\sigma}{m_1} = \frac{\sqrt{400}}{20} = 1$$

Άσκηση 3.7

Να δειχθεί η ανισότητα Cauchy - Schwarz $[E(X,Y)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

Λύση:

Έχουμε: $[E(\alpha X+Y)^2] \geq 0 \Rightarrow E(\alpha^2 X^2 + 2\alpha XY + Y^2) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(\alpha^2 X^2) + E(2\alpha XY) + E(Y^2) \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 E(X^2) + 2\alpha E(X,Y) + E(Y^2) \geq 0$ (1)

Για να είναι η (1) πάντα θετική, αρκεί $\Delta \leq 0$. Έτσι θα είναι:

$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4[E(X,Y)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \Rightarrow [E(X,Y)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ όπερ εδείχθη.

Άσκηση 3.8

Δίδονται οι διδιάστατες μεταβλητές X,Y με αντίστοιχες πιθανότητες:

Y\X	**6**	**8**	**10**
1	0,2	0	0,2
2	0	0,2	0
3	0,2	0	0,2

Ζητείται να βρείτε τα E(X),E(Y) και E(X,Y). Είναι οι X,Y ανεξάρτητες ;

Λύση:

Επειδή έχουμε διακριτές και πεπερασμένες τιμές για τη μεταβλητή X, είναι σαφές ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άθροισμα και όχι ολοκλήρωμα. Έτσι:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i p(x_i, y_j) = 6*0{,}2 + 6*0 + 6*0{,}2 + 8*0 + 8*0{,}2 + 8*0 + 2*10*0{,}2 + 10*0 = 8$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{3} y_i\, p(x_i, y_j) = 1*0{,}2 + 1*0 + 1*0{,}2 + 2*0 + \ldots + 3*0{,}2 = 4$$

$$E(X,Y)=\sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{3} x_i y_j\, p(x_i, y_j) = 6*1*0{,}2 + 8*1*0 + \ldots + 3*10*0{,}2 = 16$$

Για να ελέγξουμε αν οι X,Y είναι ανεξάρτητες, θα πάρουμε το ζεύγος (8,3) από το δοσμένο πίνακα. Αν υποθέσουμε ότι οι X,Y είναι ανεξάρτητες, τότε θα πρέπει να ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$p(x_i,y_i) = p(x_i)\ p(y_i)$

Για το ζεύγος (8,3) έχουμε p(X=8)=0+0,2+0 = 0,2 . Επίσης p(Y=3) = 0,2+0+0,2 = 0,4. Εξάλλου θα είναι p(X=8,Y=3)= 0 $\neq$ 0,08 = p(X=8)*p(Y=3). Συμπεραίνομε δηλαδή ότι οι X,Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Κεφάλαιο 4ο: Ειδικές Κατανομές Πιθανότητας

Άσκηση 4.1

Σε ένα πείραμα η πιθανότητας επιτυχίας είναι 5%. Ποια η πιθανότητα σε 10 πειράματα να έχω 3 επιτυχίες; Τουλάχιστον 2;

Λύση:

Το δύσκολο στο προβλήματα αυτά είναι να καταλάβουμε ποιά εκ των κατανομών θα χρησιμοποιήσουμε. Η επίλυση μετά το σημείο αυτό είναι απλή αριθμητική αντικατάσταση.

Όταν έχουμε σταθερό ποσοστό (εδώ 5%) επιτυχιών ή αποτυχιών πρόκειται για διωνυμική κατανομή. Αυτό ισχύει γενικά.

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0{,}05^3 0{,}95^7 = 0{,}010475$$

P(τουλάχιστον 2) = 1-P(καμία) - P(μια) = 1 - P(X=0) - P(X=1). Αλλά

$$P(X=0)=\binom{10}{0}0{,}05^0 0{,}95^{10}=0{,}599, \quad P(X=1)=\binom{10}{1}0{,}05^1 0{,}95^9=0{,}315$$
$$\Rightarrow P(X\geq 2)=1-0{,}599-0{,}315 \Rightarrow P(X\geq 2)=0{,}086$$

Άσκηση 4.2

Σε βιβλίο 200 σελίδων υπάρχουν 1000 τυπογραφικά λάθη. Ποια η πιθανότητα σε μια σελίδα να βρούμε τουλάχιστον 3;

Λύση:

Όταν έχουμε πρόβλημα που έχουμε κάποια τιμή ανά ένα μέγεθος (συνήθως χρόνος) τότε έχουμε κατανομή Poisson. Δηλαδή η έκφραση 8 ατυχήματα ανά εβδομάδα, μας δίνει την πληροφορία ότι έχουμε κατανομή Poisson. Εδώ έχουμε 1000 λάθη σε 200 σελίδες $\Rightarrow$ 5 λάθη ανά σελίδα. Άρα λ=5.

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \Rightarrow f(x) = e^{-5} \frac{5^x}{x!}.$$

P(X≥3)=1-P(X<3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(X \geq 3) = 1 - e^{-5} \frac{5^0}{0!} - e^{-5} \frac{5^1}{1!} - e^{-5} \frac{5^2}{2!} = 0{,}875347.$$

Άσκηση 4.3

Σε ένα δοχείο έχω 10 άσπρα και 20 μαύρα σφαιρίδια (πλήθος N=30). Παίρνω χωρίς επανάθεση 10 σφαιρίδια. Ποια η πιθανότητα να έχω 4 άσπρα και 6 μαύρα σφαιρίδια. Να βρεθεί επίσης η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής που θα χρησιμοποιήσετε για το παράδειγμα αυτό.

Λύση:

Η Υπεργεωμετρική κατανομή εμφανίζεται κατά τη δειγματοληψία χωρίς επανάθεση από πληθυσμό με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

$$P(X = 4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{20}{6}}{\binom{30}{10}} = 0{,}270913 \approx 27\%$$

Θα έχουμε μ=E(X)=10*(10/30)=3,33 και σ^2=Var(X)= 1,53.

Άσκηση 4.4

Μια εταιρία πούλησε 20 μηχανές προς 100 χρηματικές μονάδες την καθεμία. Αν η μηχανή πάθει βλάβη μέσα στο χρόνο εγγύησης, ο αγοραστής παίρνει 1000 χρηματικές μονάδες αποζημίωσης. Η πιθανότητα η μηχανή να πάθει βλάβη εντός εγγύησης είναι P. Ζητούνται να βρεθούν:

α) η πιθανότητα κέρδους και η πιθανότητα ζημίας της εταιρίας για P=0,1

β) η πιθανότητα ώστε η εταιρία να εργάζεται με κέρδος τουλάχιστον 1100 χ.μ.
γ) να βρεθεί κατά μέσο όρο το κέρδος της.

Λύση:

α) Έστω ότι μ μηχανές παθαίνουν βλάβη εντός του χρόνου εγγύησης. Τότε θα έχει η εταιρία εισπράξεις 2000χμ και θα πληρώσει 1000μ χμ αποζημίωση. Δηλαδή το κέρδος της θα είναι 2000 - 1000μ, που αν είναι θετικό έχει κέρδος, αλλιώς ζημία.

Θέλω P(2000-1000μ>0) = P(μ=0 ή μ=1).

Θα χρησιμοποιήσουμε διωνυμική κατανομή, γιατί η πιθανότητα να πάθει βλάβη η μηχανή είναι <u>σταθερή</u>.

$$P(\mu = 0) = \binom{20}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{20} = 0{,}122, \quad \mathrm{P}(\mu = 1) = \binom{20}{1} 0{,}1^1 0{,}9^{19} = 0{,}270$$

Άρα P(κέρδους) = 0,122-0,270 = 0,392.

Για να βρούμε την πιθανότητα ζημίας σκεφτόμαστε ως εξής. Αν δεν έχουμε κέρδος και αν μ≠2 (αν έχω 2 δεν έχω ούτε κέρδος ούτε ζημία) τότε έχουμε ζημιά. Άρα:

P(ζημίας) = 1-0,392 - P(μ=2).

$P(\mu = 2) = \binom{20}{2} 0{,}1^2 0{,}9^{18} = 0{,}285 \Rightarrow P = 1 - 0{,}392 - 0{,}285 = 0{,}323$ η πιθανότητα ζημίας.

β) P(2000-1000μ ≥ 1100) = P(μ=0) = 0,122.

γ) κ=2000-1000μ ⇒ Ε(κ)=2000-1000Ε(μ) =0 ⇒ Ε(μ) =2.

Άσκηση 4.5

Υποθέτουμε ότι σε μια εταιρία τα θανατηφόρα εργατικά ατυχήματα συμβαίνουν 12/έτος. Για κάθε ατύχημα η εταιρία πληρώνει 5.000.000 αποζημίωση. α) Ποια η πιθανότητα να πληρώσει σε ένα χρόνο η εταιρία να πληρώσει 15 εκατομμύρια; β) αν στον ετήσιο προϋπολογισμό της η εταιρία έχει 50 εκατομμύρια για αποζημίωση ποια η πιθανότητα να μην επαρκέσουν; γ) αν ξέρουμε ότι σε ένα μήνα ο αριθμός των θανατηφόρων ατυχημάτων ήταν λιγότερα των τριών, ποια η πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 1;

Λύση:

α) Θα χρησιμοποιήσομε κατανομή Poisson καθώς ακούμε την έκφραση <u>ανά</u>. Ο δε λ της κατανομής Poisson θα είναι 12. Θα είναι:

$$P(X=3)=e^{-12}\frac{12^x}{x!}=e^{-12}\frac{12^3}{3!}=0{,}00177$$

β) Για να μην επαρκέσουν, η εταιρία θα πρέπει να έχει πάνω από 10 εργατικά ατυχήματα. Δηλαδή 11,12,... κτλ. Είναι σαφές ότι μπορεί να έχει άπειρα ατυχήματα αλλά πεπερασμένα και έτσι θα χρησιμοποιήσουμε άθροισμα.

$$P(X>10)=1-P(X\leq 10)=1-e^{-12}\sum_{i=0}^{10}\frac{12^i}{i!}=0{,}65$$

γ) Είναι σαφές ότι είναι λ=1 ατύχημα / μήνα (κατανομή Poisson μεν, αλλά όχι ίδια με την προηγούμενη καθώς αλλάζει τώρα το λ).

$$P(X\geq 1\setminus X<3)=\frac{P(X\geq 1\cap X<3)}{P(X<3)}=\frac{P(1\leq X<3)}{P(X<3)}=\frac{e^{-1}(1+\frac{1}{2})}{e^{-1}(1+1+\frac{1}{2})}=0{,}60$$

Άσκηση 4.6

Από τον ποιοτικό έλεγχο στην παραγωγή ενός προϊόντος προέκυψε ότι κατά μέσο όρο μια στις 10.000 μονάδες είναι ελαττωματική. Αν η μηχανή παράγει 40.000 μονάδες σε μια μέρα, να βρείτε α) την πιθανότητα οι ελαττωματικές μονάδες προϊόντος να μην υπερβαίνουν τις 3, β) σε δυο μέρες να μην υπερβαίνουν τις 5.

Λύση:

α) Παρόλο που ήδη γνωρίζουμε πως θα χρησιμοποιήσουμε κατανομή Poisson αφού 4 στις 40.000 είναι ελαττωματικές (λ=4), είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε πως αν η πιθανότητα είναι πολύ μικρή (P=1/10000) και το Ν πολύ μεγάλο (εδώ 40.000) προσεγγίζουμε με κατανομή Poisson.

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(X \leq 3) = e^{-4}\left[\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right] = 0{,}4335 \approx 43{,}4\%$$

β) Είχαμε πάρει το λ της κατανομής Poisson ανά μέρα. Εδώ μας ζητάει ανά δυο μέρες. Επομένως οφείλομε να αλλάξομε το λ της Poisson και κατά συνέπεια να χρησιμοποιήσουμε μια νέα Poisson. Έτσι λ=8 (πολλαπλασιάσαμε επί 2).

$$P(X \leq 5) = e^{-8}\sum_{i=1}^{5}\frac{8^i}{i!} = 0{,}1912 \approx 19\%$$

Άσκηση 4.7

Η απόκλιση της βολής ενός σκοπευτή από το κέντρο του στόχου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας 2(1-x) όπου $0 \leq x \leq 1$. Ο σκοπευτής κερδίζει το στοίχημα αν η απόκλιση από το κέντρο το στόχου είναι μικρότερη από 1/ 2. Να υπολογισθεί ο αριθμός των βολών ώστε η πιθανότητα να κερδίσει να είναι μεγαλύτερη του 98%.

Λύση:

Εδώ έχουμε το εξής πρόβλημα. Δοκιμάζουμε (θεωρητικά επ' άπειρον) μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Όταν έχουμε <u>εμφάνιση πρώτης επιτυχίας</u> θα χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική κατανομή.

Έστω Α το ενδεχόμενο να έχουμε απόκλιση μικρότερη του ½. Για να βρούμε την πιθανότητα Ρ(Α) σκεφτόμαστε ότι έχουμε τυχαία μεταβλητή και άρα δεν παίρνει πεπερασμένες τιμές, που σημαίνει ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε απαραίτητα ολοκλήρωμα.

$$P(A)=P(X\le \frac{1}{2})=\int_0^{1/2} 2(1-X)dx=\frac{3}{4}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη γεωμετρική κατανομή οπότε και θα πάρουμε:

$f(y)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{y-1}$, $y=1(1)n$. Η πιθανότητα να κερδίσει το στοίχημα σε n το πολύ βολές είναι: $P(Y\le n)=\left(\frac{3}{4}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{y-1}=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)\left[1-\frac{1}{4^n}\right]=1-\frac{1}{4^n}$.

Πρέπει $P(Y\le n)\ge 0{,}98 \Rightarrow 1-\frac{1}{4^n}\ge 0{,}98 \Rightarrow 4^n \ge 50 \Rightarrow n\ge 3$ (τουλάχιστο 3 βολές).

Άσκηση 4.8

Χαλύβδινο έλασμα λυγίζεται πολλές φορές μέχρι να κοπεί. Η πιθανότητα να κοπεί σε κάθε λύγιση είναι σταθερή και ίση με P=0,1. Να βρεθούν α) η πιθανότητα να κοπεί στην 3η λύγιση, β) ποιος ο μέσος αριθμός λυγίσεων για να κοπεί το έλασμα;

Λύση:

α) Θα χρησιμοποιήσουμε γεωμετρική κατανομή, γιατί θα λυγίζουμε το έλασμα έως ότου να σπάσει (επιτυχία) πρώτη φορά. Θα έχουμε:

$$f(x)=0{,}1*0{,}9^{n-1} \Rightarrow P(X=3)=0{,}1*0{,}9^2=0{,}081\approx 8\%$$

β) το μέσο όρο θα τον αναζητήσουμε στο μέσο όρο της γεωμετρικής κατανομής:

E(X)=1/P = 1/0,1 = 10 λυγίσεις (γι' αυτό και η προηγούμενη πιθανότητα προέκυψε τόσο μικρή.)

Άσκηση 4.9

Να βρεθεί η P(|X| >3/2) αν η X~U(-3,3) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή.

Λύση:

Απλή αριθμητική εφαρμογή. Αρκεί να θυμόμαστε ότι η f(x) στην ομοιόμορφη κατανομή παρέχεται εκ της παρακάτω σχέσεως:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & -b\le x\le a\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon\end{cases}$$ όπου (a,b) το διάστημα που δίδεται στην εκφώνηση. Έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & \text{-}3\le \mathrm{x}\le 3\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon\end{cases}, \quad \text{-}3\le \mathrm{x}\le 3.$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(|\mathrm{x}|>\frac{3}{2})=1-P(|x|\le\frac{3}{2})=1-P(-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2})=1-\int_{-3/2}^{3/2}\frac{1}{6}dx=\frac{1}{2}$$

Σημειώνεται ότι E(X)=0 και Var(X)=3.

Άσκηση 4.10

Αν η τυχαία μεταβλητή έχει ομοιόμορφη κατανομή με E(X)=1 και διασπορά Var(X)=4/3, να βρεθεί η P(X<0).

Λύση:

Απλό παράδειγμα. Είναι $E(X)=\dfrac{a+b}{2}=1\Rightarrow a+b=2 \quad (1)$. Επίσης λόγω της δοσμένης διασποράς έχομε $Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow |b-a|=4\Rightarrow b-a=4,(b>a) \quad$ (2) επιλύοντας το σύστημα των (1) και (2) εκλαμβάνουμε α=-1 και b=3. Άρα:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{-}1\le \mathrm{x}\le 3\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon\end{cases}$$ άρα θα είναι $P(X<0)=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{1}{4}$ η ζητούμενη πιθανότητα.

Άσκηση 4.11

Αν η X~N(6,4) ακολουθεί κανονική κατανομή να βρεθούν οι πιθανότητες P(X<6) και P(X≥3).

Λύση:

Ισχύει ως γνωστόν P(a<X≤b) = F(b) - F(a) = Φ[(b-μ)/σ] - Φ[(a-μ)/σ] όπου N(μ,$σ^2$).

Άρα $$P(X<6)=P(X-6<6-6)=P(X-6<0)=P\left(\frac{X-6}{2}<0\right)=P(Z<0)=F(0)=\frac{1}{2},$$

όπου το F(0) το εκλάβαμε από τον πίνακα της κανονικής κατανομής. Στην κατακόρυφη Z στήλη πήγαμε στο 0.0 και στην οριζόντια στο 0.00 έτσι ώστε να δώσουν προστιθέμενες 0.00 δηλαδή 0.

Επίσης $$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X-6<-3)=1-P(\frac{X-6}{2}<-\frac{3}{2})=1-P(Z<-\frac{3}{2})=$$
$$=1-F(-3/2)=F(3/2)=0{,}933.$$

<u>**Παρατήρηση**</u>: Παραπάνω είπαμε 1-F(-3/2)=F(3/2) γιατί η κανονική κατανομή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Για να πάρουμε την τιμή F(3/2)=F(1,5) πήγαμε στον πίνακα Φ της κανονικής κατανομής και στην κατακόρυφη στήλη αναζητήσαμε το 1,5 στη δε οριζόντια το 0,00 έτσι ώστε προστιθέμενα να δώσουν 1,50=1,5.

Άσκηση 4.12

Η τυχαία μεταβλητή X δίνει την ποσότητα βενζίνης σε χιλιάδες δρχ. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Γάμμα με μέση τιμή 5000lt. Και τυπική απόκλιση 2500lt. Αν οι δεξαμενές του πρατηρίου μια μέρα έχουν 7000lt. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να μην επαρκέσουν δηλαδή P(X>7).

Λύση:

Θα έχουμε $E(X)=\frac{a}{b}=5 \Rightarrow a=5b \quad (1)$ και επίσης $Var(X)=2,5 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b^2}=2,5} \quad (2)$

Επιλύοντας το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε a=4 και b=4/5. Αντικαθιστούμε στον τύπο της κατανομής Γάμμα: $f(x)=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^4}{(4-1)!}x^3 e^{-\frac{4}{5}x}$,x>0. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω ολοκλήρωμα βρίσκουμε τη ζητούμενη πιθανότητα:

$P(X>7)=\int_7^{+\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^4}{3!}x^3 e^{-\frac{4}{5}x} \approx 0,1906$. Επειδή το ολοκλήρωμα αυτό είναι εν γένει δύσκολο στον υπολογισμό του, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι ισούται με το άθροισμα:

$$\boxed{\int_t^{+\infty}\frac{b^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-bx}dx=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-bt}\frac{(bt)^k}{k!}}$$

Άσκηση 4.13

Η αντοχή Χ (kg) συνθετικού νήματος ακολουθεί την κατανομή Weibull με α=1/5 και b=2. Ποια η πιθανότητα να σπάσει το νήμα σε φορτίο 4kg;

Λύση:

Θα έχουμε $f(x)=\frac{1}{5}2x^{2-1}e^{-\frac{1}{5}x^2}=\frac{2x}{5}e^{-\frac{x^2}{5}}$ οπότε αρκεί να ολοκληρώσουμε την τελευταία σχέση από 0 ως 4 γιατί τα κιλά δεν είναι διακριτά και πεπερασμένα ανάμεσα στο 0 και στο 4. Για παράδειγμα μπορούμε να φορτίσουμε το συνθετικό νήμα με 3kg και 457gr. Έτσι θα έχουμε:

$P(X \le 4)=\int_0^4 \frac{2x}{5}e^{-\frac{x^2}{5}} \approx 0,959$.

Άσκηση 4.14

Να βρεθεί η βαθμίδα κινδύνου ή αποτυχίας $q(x)=\dfrac{f(x)}{1-F(x)}$ για α) την εκθετική κατανομή, β) την κατανομή Weibull.

Λύση:

α) Αν στην κατανομή Weibull θέσω b=1 τότε θα πάρω την εκθετική. $f(x)=ae^{-ax}$. Η F(x) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) ή η f(x) είναι η παράγωγος ως προς x της F(x). Δηλαδή $F(x)=\int ae^{-ax}dx=c-e^{-ax}$. Το c (η σταθερά ολοκλήρωσης) το επιλέγουμε αυθαίρετα με 1, άρα $F(x)=1-e^{-ax} \Rightarrow 1-F(x)=e^{-ax}$.Άρα έχουμε q(x)=a (σταθερό).

β) Για την κατανομή Weibull τώρα, είναι $F(x)=-(-ax^{b})'e^{-ax^{b}}=-e^{-ax^{b}}+c,$ με c=1 αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Τότε θα πάρουμε $q(x)=abx^{b-1}$, x>0. Είναι σαφές ότι αν b>1 είναι αύξουσα, αν b<1 φθίνουσα και αν b=1 εκθετική.

Άσκηση 4.15

Σε μια λογαριθμική κατανομή να βρεθεί η πιθανότητα P(x>11,7) για $\sigma_X/\mu_X=0,2$ και $\mu_X=9$.

Λύση:

Επειδή ο συντελεστής μεταβλητότητας της X είναι $\sigma_X/\mu_X=0,2<0,3$ θα είναι σ=0,2. Υπολογίζω το $\mu=\ln(\mu_X)-\sigma^2/2=2,177$. Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$P(X>11,7)=1-P(X<11,7)=1-P(\ln X<Ln(11,7))=1-P(z<\frac{\ln(11,7)-2,177}{0,2})=$$
$$1-F(1,412)=1-0,92073\approx 0,079$$

Σημειώνουμε ότι για την τιμή F(1,412) ανατρέξαμε στους πίνακες που παρέχουν το Φ της κανονικής κατανομής και στην κατακόρυφη στήλη πήγαμε στο 1,4 στη δε οριζόντια στο

0,01 (δηλαδή 1,41). Το ψηφίο των χιλιοστών (2) το αγνοήσαμε, καθόσον οι πίνακες δίνουν την τιμή Φ με ακρίβεια εκατοστού.

Άσκηση 4.16

Να υπολογισθεί η γεννήτρια συνάρτηση και η χαρακτηριστική της διωνυμικής κατανομής και της Poisson.

Λύση:

Κάνοντας απλή εφαρμογή των τύπων, αρχίζουμε από τη διωνυμική κατανομή:

$$g(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}s^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}(ps)^k(1-p)^{n-k}=(ps+1-p)^n$$

$$\phi(t)=E(e^{itx})=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{itk}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}(pe^{it})^k(1-p)^{n-k}=(pe^{it}+1-p)^n$$

για τη γεννήτρια και τη χαρακτηριστική συνάρτηση αντίστοιχα. Προχωρούμε για την κατανομή Poisson. Θα έχουμε αντίστοιχα:

$$g(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{(s\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda}\,e^{(s\lambda)}=e^{(s-1)\lambda}$$

$$\phi(t)=E(e^{itx})=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{itk}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{it}\lambda\right)^k}{k!}=e^{-(1-e^{it})\lambda}$$

Άσκηση 4.17

Με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών συναρτήσεων να βρεθεί η μέση τιμή E(X) και η διασπορά Var(X) της διωνυμικής κατανομής και της κατανομής Poisson.

Λύση:

α) <u>Διωνυμική</u>: Λαμβάνοντας υπόψη την άσκηση 4.16,έχουμε:

$$E(X) = m_1 = \frac{\phi'(0)}{i} = \frac{n(pe^{it} + 1 - p)ipe^{it}}{i}(t = 0) = \frac{n(p + 1 - p)ip}{i} = np$$

$$Var(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{\phi''(0)}{i^2} - n^2 p^2 = \frac{n(n-1)p^2 + np}{i^2} - n^2 p^2 = np(1 - p)$$

β) <u>Poisson</u>: Εντελώς ανάλογα παίρνομε:

$$E(X) = m_1 = \frac{\phi'(0)}{i} = \frac{i\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it} - 1)}}{i}(t = 0) = \frac{i\lambda}{i} = \lambda$$

$$Var(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{\phi''(0)}{i^2} - \lambda^2 = \frac{-\lambda - \lambda^2}{-1} - \lambda^2 = \lambda$$

Κεφάλαιο 5ο: Οριακά Θεωρήματα

Άσκηση 5.1

Έστω η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή X~N(0,1) και η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$,t∈R. Να υπολογίσετε την μέση τιμή E(X), τη διασπορά Var(X) και την ασυμμετρία (λοξότητα) β.

Λύση:

Είναι $\phi'(0) = -\frac{2t}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow m_1 = E(X) = 0$.

Επίσης: $\phi''(0) = -1 \Rightarrow m_2 = \dfrac{\phi''(0)}{i^2} = 1 \Rightarrow Var(X) = m_2 - m_1^2 = 1 - 0 \Rightarrow Var(X) = 1$

Τέλος $\phi'''(0) = 0 \Rightarrow \mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = 0 - 3*1*0 + 2*0 = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Άσκηση 5.2

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει f(x)=3e $^{-3x}$, x≥0. Να βρεθεί ε μέση τιμή της E(X), η διασπορά Var(X) και η πιθανότητα P(|x-μ|≤2/3). Να βρεθεί το φράγμα της ανισότητας με τη χρήση της ανισότητας Chebyshev.

Λύση:

Η μορφή της κατανομής είναι προφανώς εκθετική αν α=1 και b=3. Άρα θα είναι E(X)=α/b =1/3. Τώρα E(X^2)=α(α+1)/b^2 = 2/9, δηλαδή Var(X)=2/9-1/9=1/9.

$$P(|x-\mu| \le \frac{2}{3}) = P(\left|x - \frac{1}{3}\right| \le \frac{2}{3}) = P(-\frac{1}{3} \le x \le 1) = \int_{-1/3}^{1} 3e^{-3x} dx = 0{,}95$$

Τέλος για το ζητούμενο φράγμα θα έχουμε με απλή αριθμητική εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev:

$$P(\left|x-\frac{1}{3}\right|\leq\frac{2}{3})\geq 1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=0{,}75,\quad \alpha\phi o\upsilon\quad \varepsilon=\sigma t\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{1}{3}t\Rightarrow t=2.$$

Άσκηση 5.3

Η τυχαία μεταβλητή Χ έχει μέση τιμή Ε(Χ)=3 και $E(X^2)=13$. Να βρεθούν:

α) η πιθανότητα P(-2<X<8)

β) η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής Y=3X+5

Λύση:

α) Θα είναι $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 = 13 - 9 = 4 \Rightarrow \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$ (σ>0). Θα κάνουμε εν συνεχεία χρήση της ανισότητας Chebyshev:

$$P(-2<X<8)=P(-5<X-3<5)=P(|X-3|<5)=P(|X-3|<\frac{5}{2}2)\geq 1-\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=0{,}84$$

β) $Var(Y)=Var(3X+5)=3^2Var(X)=9*4=36$, διότι $Var(aX+b) \approx a^2\ Var(X)$.

Άσκηση 5.4

Ρίχνω ένα ζάρι 64 φορές. Ποια η πιθανότητα να φέρω τουλάχιστο 12 εξάρια;

Λύση:

Θα είναι $x_i=\begin{cases}1, & \gamma\iota\alpha\ \ 6\\ 0, & o\chi\iota\ \ 6\end{cases}$ $\Rightarrow$ πιθανότητα 1/6 για το πρώτο , 5/6 για το δεύτερο.

$S_{64} = \sum_{i=1}^{64} x_i \geq 12$. Είναι E($x_i$)=1/6 και Var($x_i$)=5/36. Έχουμε (n=64 >30) διαδοχικά:

$$P(S_{64} \geq 12) = P\left(\frac{S_{64} - 64\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36*64}}} \geq \frac{12 - 64\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36*64}}} \right) = P(Z \geq 0{,}044721) = 1 - P(Z < 0{,}44721) =$$

$$= 1 - F(0{,}44721) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33.$$